数 学 学 报

第10卷 第1期

目 录

$y' = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n}{b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \cdots + b_ny^n}$ 的积分曲綫的拓扑結构…………李森林（1）

关于可三角剖分的紧致流形的模2示嵌类……………………………吳振德（22）

直交多項式級数的求和……………………………………………陈建功（33）

蔡查罗求和法在巴拿赫空間…………………………………………李訓經（41）

整系数射影么模羣的自同构…………………………………………应玫茜（55）

递归算法 遞歸算法論Ⅰ……………………………………………胡世华（66）

核函数 遞歸算法論Ⅱ…………………………………………胡世华 陆鍾万（89）

递归函数的范式 遞歸算法論Ⅲ……………………………………胡世华（98）

稳定性理論中第一临界情形的微分方程与微分差分方程的等价性問題……………………………………………………王 联（104）

有时滞的系統的无条件稳定性………………………………………秦元勳（125）

ACTA MATHEMATICA SINICA Vol. 10, No. 1

CONTENTS

Topological Structure of Integral Curves of the Differential Equation $y' = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \cdots + b_n y^n}$ ………… *Lee Shen-ling* (20)

On the Modulo 2 Imbedding Class of Triangulable Compact Manifolds……… *Wu Cheng-der* (31)

Summability of the Series of Orthogonal Polynomials……… *Chen Kien-kwong* (39)

Метод суммирования Чезаро в пространстве Банаха…… *Ли Сюнь-цзинь* (53)

Automorphisms of the Projective Unimodular Group…………… *Ying Mei-chie* (65)

Recursive Algorithms *Theory of Recursive Algorithms* I ……… *Hu Shih-hua* (88)

Kernel Functions *Theory of Recursive Algorithms* II ……… *Hu Shih-hua* and *Loh Chung-wan* (97)

Normal Forms of Recursive Functions *Theory of Recursive Algorithms* III……… *Hu Shih-hua* (103)

On the equivalence Problem of Differential equations and Difference-Differential equations in the Theory of Stability of the First Critical Case *Wang Lian* (123)

Unconditional Stability of Systems with Time-Lags…………… *Chin Yuan-shun* (141)

第10卷 第1期　　数 学 学 报　　Vol. 10, No. 1
1960 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1960

$y' = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n}{b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \cdots + b_ny^n}$ 的积分曲綫的拓扑結构*

李 森 林
（湖 南 大 学）

設 $Y_n = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n$, $X_n = b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \cdots + b_ny^n$. 其中 Y_n, X_n 无公因子. 微分方程

$$y' = \frac{Y_n}{X_n} \tag{1}$$

只有一个奇点(0, 0). 当 $n = 1$ 时, Poincare 决定了(1)的积分曲綫的拓扑結构. 当 $n = 2$ 时, Лягина 决定了 (1) 的积分曲綫的結构[1]. 当 $n = 3$ 时, 张棣决定了 (1) 的积分曲綫的拓扑結构[2]. 他們用的方法, 主要是用变换将方程 (1) 之不变直綫变到指定之直綫如 $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm x$ 去. 但当 n 稍大时, 如 $n > 10$, 就发生困难了. 因为决定不变直綫时, 要解高次方程式, 而方程之次数大于5, 一般就不能解. 本文目的, 先研究方程(1)只有m个($m \leqslant n + 1$) 不变直綫时, 其积分曲綫有且只有那些不同类型, 又这些不同类型的数目亦算出. 于是方程 (1) 有且只有那些不同类型及其不同类型数目的問題就解决了. 本文是将第二类抛物的及双曲的类型合为一类而称为第二类抛物的.

I. 积分曲綫在不变直綫附近的类型的判定. 令

$$f(k) = \frac{a_0 + a_1k + \cdots + a_nk^n}{b_0 + b_1k + \cdots + b_nk^n}, \tag{1.1}$$

若 k_0 为 $f(k) - k = 0$ 之一实根. 则 $y = k_0x$ 为 (1) 之一不变直綫. 又当 $b_n = 0$ 时, 则 $x = 0$ 为 (1) 之不变直綫. 依 Шилов 之方法[3]. 当 $f'(k_0) > 1$ 时, 则 (1) 之积分曲綫在 $y = k_0x$ 附近的两側的类型同为第一类抛物的. 当 $f'(k_0) < 1$, 則(1)的积分曲綫在 $y = k_0x$ 附近的两側的类型同为第二类抛物的(包括双曲类, 以下同此). 当 $f'(\infty)$ 在0与1之間时, 积分曲綫在 $x = 0$ 附近两側的类型同为第一类抛物的. 否則同为第二类抛物的. 若 $f'(k_0) = 1$, 或 $f'(\infty) = 1$ 时, 积分曲綫在不变直綫附近之类型依表1, 2来判断.

表 1

不变直綫型	$k < k_0$	$k > k_0$
第一类抛物的	$f(k) < k$	$f(k) > k$
第二类抛物的	$k < f(k) < k_0$, 或 $f(k) > k_0$	$k_0 < f(k) < k$, 或 $f(k) < k_0$

对于每个不变直綫附近积分曲綫类型的研究, 用表1, 2不大方便, 因为要解一些不等式之故. 我們改用下面的方法:

因

$$f(k) - k = f(k) - f(k_0) - (k - f(k_0)) = \\ = (k - k_0)[f'(\xi) - 1], \quad (\because k_0 = f(k_0))$$

* 1958年5月8日收到.

表 2

不变直綫型	$k<+\infty$	$k>-\infty$
第一类抛物的	$f(k)<k$	$f(k)>k$
第二类抛物的	$k<f(k)<+\infty$, 或 $f(k)<0$	$-\infty<f(k)<k$, 或 $f(k)>0$

其中 ξ 在 k, k_0 之間.

1°, 若 $f'(\xi)>1$, a) 若 $k<k_0$, 則 $f(k)<k$, 因而相应之积分曲綫之类型为第一类抛物的. b) 若 $k>k_0$, 則 $f(k)>k$, 因而相应之积分曲綫之类型亦为第一类抛物的. 这里的 k 是指 $|k-k_0|$ 充分小的.

2°, 若 $f'(\xi)<1$, a) 若 $k<k_0$, 則 $f(k)>k$, 因而相应之积分曲綫之类型为第二类抛物的. b) 若 $k>k_0$, $f(k)<k$, 因而相应之积分曲綫之类型亦为第二类抛物的.

因 $f''(k)$ 在 k_0 附近是連續的. 而

$$f'(k)=f'(k_0)+f''(\xi)(k-k_0),$$

其中 ξ 在 k_0, k 之間. 故有

若 $f'(k_0)=1$, $f''(k_0)=\alpha(\neq 0)$,

a) 若 $\alpha>0$, 則 $f'(k_0-\varepsilon)<1$, $f'(k_0+\varepsilon)>1$,

b) 若 $\alpha<0$, 則 $f'(k_0-\varepsilon)>1$, $f'(k_0+\varepsilon)<1$,

其中 ε 为充分小的正数. 故有

定理 1.1. 若 $y=k_0x$ 为方程(1)之不变直綫, 且 $f'(k_0)=1$, $f''(k_0)=\alpha(\neq 0)$. 則当 $\alpha>0$ (或 <0), (1)之积分曲綫在 $y=k_0x$ 附近之左 $(k_0-\varepsilon)$ 及右 $(k_0+\varepsilon)$ 之类型分别为第二(或第一)类抛物的及第一(或第二)类抛物的. ε 为充分小之正数.

定理 1.2. 若 $y=k_0x$ 为方程(1)之不变直綫, 且 $f'(k_0)=1$, $f^{(\lambda)}(k_0)=0$, $\lambda=2,\cdots\cdots,\mu-1$, 但 $f^{(\mu)}(k_0)=\alpha(\neq 0)$. 則

(一)若 μ 为奇数, 当 $\alpha>0$ (<0) 积分曲綫在 $y=k_0x$ 附近的两側的类型同为第一(第二)类抛物的.

(二)若 μ 为偶数, 当 $\alpha>0$ (<0) 积分曲綫在 $y=k_0x$ 附近之左 $(k_0+\varepsilon)$ 及右 $(k_0-\varepsilon)$ 之类型分别为第一(第二)类抛物的及第二(第一)类抛物的. ε 为充分小之正数.

由台劳公式, 得

$$f'(k)=1+\frac{f^{(\mu)}(\xi)}{\mu!}(k-k_0)^{\mu-1}.$$

而 $f^{(\mu)}(\xi)$ 与 α 同号. 由此易得所求之証.

II. 积分曲綫的类型与环形排列. 如所周知, 微分方程 (1) 的积分曲綫是对称于原点 (0, 0). 不失一般性質. 可設(1)之不变直綫皆在 I, III 两象限內 (否則可由仿射变換而得到, 积分曲綫的类型又是不会改变的). 今考査(1)具有 m 个不变直綫

$$y=k_ix,\ i=1,2,\cdots,m.\quad (m\leqslant n+1)$$

且

$$0<k_1<k_2<\cdots<k_m. \tag{2.1}$$

今以原点为中心, 1 为半径作圓弧, 交直綫 $y=k_ix$ 于点 P_i (在 I 象限內), P_i' (在 III

象限內)．若积分曲綫的类型在 $y = k_ix$ 的两側附近同为第一(第二)类抛物的．我們于 P_i，P'_i 上記以記号"1"("2")．若积分曲綫的类型在 $y = k_0x$ 附近之左 $(k_i + \varepsilon)$ 及右 $(k_i - \varepsilon)$ 分別为第一(第二)及第二(第一)类抛物的．我們于 P_i，P'_i 上記以記号"3"("4")．今設 $y = k_ix$ 上之类型記号为"λ_i"($\lambda_i = 1, 2, 3, 4$)．于是，此 m 根不变直綫之类型記号对应于一排列 $[\lambda_m, \cdots, \lambda_1]$．积分曲綫之类型完全由此 m 根不变直綫附近两側之类型而定．这表示：有一积分曲綫就有一排列与之对应．令

$$\phi(k) \equiv (b_0 + b_1k + \cdots + b_nk^n)k - (a_0 + a_1k + \cdots + a_nk^n), \tag{2.2}$$

則

$$f(k) = k - \frac{\phi(k)}{b_0 + b_1k + \cdots + b_nk^n}. \tag{2.3}$$

因此，由 $f(k_i) = k_i$，即知 $\phi(k_i) = 0$，而 X_n, Y_n 无公因子(已假設)．故 $b_0 + b_1k_i + + \cdots + b_nk_i^n$, $a_0 + a_1k_i + \cdots + a_nk_i^n$ 不同为零．而由 $f(k_i) = k_i$，得

$$b_0 + b_1k_i + \cdots + b_nk_i^n = \frac{a_0 + a_1k_i + \cdots + a_nk_i^n}{k_i},$$

及由(2.1)，故 $b_0 + b_1k_i + \cdots + b_nk_i^n \neq 0$，設 k_i 为 $\phi(k) = 0$ 之 μ_i 重根(但不为 $\mu_i + 1$ 重根)．故

$$\phi^{(t)}(k_i) = 0,\ t = 1, \cdots, \mu_i - 1,\ \phi^{(\mu_i)}(k_i) \neq 0.$$

令

$$Q(k) = \frac{1}{b_0 + b_1k + \cdots + b_nk^n},$$

由于 $b_0 + b_1k_i + \cdots + b_nk_i^n \neq 0$，易知

$$Q^{(t)}(k_i) \neq \infty, \quad t \text{ 为任何正整数},$$

由莱布尼兹公式，及(2.3)，得

$$\begin{aligned} f^{(t)}(k) &= k^{(t)} - [\phi(k)\,Q(k)]^{(t)} = \\ &= k^{(t)} - \phi^{(t)}(k)\,Q(k) - c_1^t\phi^{(t-1)}(k)\,Q'(k) - \cdots - \phi(k)\,Q^{(t)}(k). \end{aligned}$$

若 t 合于 $2 \leqslant t \leqslant \mu_i - 1$ 之整数，則

$$f^{(t)}(k_i) = 0, \quad f^{(\mu_i)}(k_i) = -\frac{\phi^{(\mu_i)}(k_i)}{b_0 + b_1k_i + \cdots + b_nk_i^n} \neq 0,$$

而由定理 1.2，即知：

若 μ_i 为奇数(或偶数)时，积分曲綫在不变直綫 $y = k_ix$ 之类型記号为 1，2(或 3，4)．且有

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = n + 1 - \nu, \tag{2.4}$$

其中 ν 为 $\phi(k) = 0$ 之虚根之数目(二重根作为两个根，…)．因此 ν 为偶数．

定理 2.1. 設微分方程(1)之积分曲綫之类型所对应之排列为 $[\lambda_m, \cdots, \lambda_1]$，則諸 λ 中其为 1，2 之个数与 $n + 1$ 之差为偶数．

1°，若諸 λ 中无一为 1，2，則由(2.4)知諸 μ 皆为偶数．再由(2.4)即得所求之証．此情况須在 n 为奇数时方成立．

2°，設諸 λ 中为 1，2 者尽列为 $\lambda_{\tau_1}, \lambda_{\tau_2}, \cdots, \lambda_{\tau_\theta}$．則 $\mu_{\tau_1}, \mu_{\tau_2}, \cdots, \mu_{\tau_\theta}$ 皆为奇数，其

余之μ皆为偶数. 故由(2.4)得

$$\mu_{\tau_1}+\mu_{\tau_2}+\cdots+\mu_{\tau_\theta}\equiv n+1 \pmod{2},$$

而

$$\mu_{\tau_1}+\mu_{\tau_2}+\cdots+\mu_{\tau_\theta}\equiv \theta \pmod{2},$$

故

$$\theta\equiv n+1 \pmod{2},$$

卽得所求之証.

若属于方程(1)之两积分曲綫 L_1, L_2 之类型其相应之排列分别为 $[\lambda_m,\cdots,\lambda_2,\lambda_1]$, $[\lambda_{m-1},\cdots,\lambda_1,\lambda_m]$. 易知此二积分曲綫之类型相同. 因 L_2 經旋轉及仿射变換而成为 L_1.

定理 2.2. 設 n_1, n_2, n_3, n_4 为正整数或零(不全为零). 且 $n_1+n_2\equiv n+1 \pmod{2}$, $n+1-(n_1+n_2+2n_3+2n_4)\geqslant 0$. 今以 n_1 个 1, n_2 个 2, n_3 个 3, n_4 个 4 任意作成一排列 $[\lambda_m,\cdots,\lambda_1]$. 則方程(1)中必有一积分曲綫其类型所对应之排列为 $[\lambda_m,\cdots,\lambda_1]$. 但 $m=n_1+n_2+n_3+n_4<n+1$.

証. 今任取 $n_1+n_2+n_3+n_4=m$ 个正数 $k_1, k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1<k_2<\cdots<k_m$. 又定义

$$\mu_i=\begin{cases}1, & \text{当 } \lambda_i=1,2 \text{ 时}.\\ 2, & \text{当 } \lambda_i=3,4 \text{ 时}.\end{cases}\qquad (i=1,\cdots,m) \tag{2.5}$$

而諸λ中有 n_1 个 1, n_2 个 2. 且 $n+1-(n_1+n_2)$ 为偶数(題設).

故

$n+1-(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m)$ 为偶数, 設为 $2q$. 所以由(2.5)得

$$n+1-(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m)=n+1-(n_1+n_2+2n_3+2n_4)\geqslant 0,$$

故 $q\geqslant 0$. 令

$$Q(k)\equiv(k^2+1)^q,$$

則 $Q(k)=0$ 无实根. 作

$$\left.\begin{aligned}\phi(k)&\equiv(k-k_1)^{\mu_1}(k-k_2)^{\mu_2}\cdots(k-k_m)^{\mu_m}Q(k)\equiv\\ &\equiv k^{n+1}-S_1k^n+S_2k^{n-1}+\cdots+(-1)^{n+1}S_{n+1},\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

則 $S_1, S_2,\cdots,S_{n+1}$ 皆为 $k_1, k_2,\cdots,k_m$ 之已知函数(卽不含 k), 又定义

$$\alpha_i=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{当 } \lambda_i=1,3 \text{ 时}.\\ -\dfrac{1}{2}, & \text{当 } \lambda_i=2,4 \text{ 时}.\end{cases} \tag{2.7}$$

对未知数列 $b_0, b_1,\cdots,b_n$ 中, 我們首先选定 $b_n=1$, 又于 b_m, b_n 中之各 b (假如 $m<<n-1$ 时)皆选为零. 然后由下列方程組来决定 $b_0,\cdots,b_{m-1}$ 以 b_m 表之,

$$\left.\begin{aligned}b_0+b_1k_1+\cdots+b_{m-1}k_1^{m-1}&=\frac{-\phi^{(\mu_1)}(k_1)}{\alpha_1}-b_nk_1^n-l_mb_mk_1^m,\\ b_0+b_1k_2+\cdots+b_{m-1}k_2^{m-1}&=\frac{-\phi^{(\mu_2)}(k_2)}{\alpha_2}-b_nk_2^n-l_mb_mk_2^m,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_0+b_1k_m+\cdots+b_{m-1}k_m^{m-1}&=\frac{-\phi^{(\mu_m)}(k_m)}{\alpha_m}-b_nk_m^n-l_mb_mk_m^m,\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

其中　　$l_m=1$, 当 $m<n$ 时. $l_m=0$, 当 $m=n$.

而
$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & k_1 & \cdots & k_1^{m-1} \\ 1 & k_2 & \cdots & k_2^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & k_m & \cdots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{因 } k_1<k_2<\cdots<k_m).$$

今以 $\frac{-\phi^{(\mu_j)}(k_j)}{a_j}-b_nk_j^n$ $(j=1,\cdots,m)$ 代 Δ 中之 k_j^i 之后所得之行列式以 $\Delta_{(i,1)}$ 記之. 又以 k_j^m 代 Δ 中之 k_j^i 后所得之行列式以 $\Delta_{(i,2)}$ 記之. 則由(2.8)得

$$b_i=\frac{\Delta_{(i,1)}-l_mb_m\Delta_{(i,2)}}{\Delta},\ i=0,1,\cdots,m-1. \tag{2.9}$$

当 $m<n$ 时, b_m 之值尙未决定, 又由 (2.6), 知 $\phi^{(\mu_i)}(k_i)\neq 0$, 不論 b_m 之值为何. 由 (2.8) 知

$$b_0+b_1k_i+\cdots+b_nk_i^n\neq 0, \tag{2.10}$$

当 $q>0$ 时, 由 $2q=n+1-(\mu_1+\cdots+\mu_m)$, 即知 $m<n$. 下面我們要証, 可以找到 b_m 使 $\sqrt{-1}$ 不为

$$b_0+b_1k+\cdots+b_nk^n=0 \tag{2.11}$$

之根. 在

$$\Delta_{(i,2)}=\begin{vmatrix} 1 & k_1 & \cdots & k_1^{i-1} & k_1^m & k_1^{i+1} & \cdots & k_1^{m-1} \\ 1 & k_2 & \cdots & k_2^{i-1} & k_2^m & k_2^{i+1} & \cdots & k_2^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & k_m & \cdots & k_m^{i-1} & k_m^m & k_m^{i+1} & \cdots & k_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

中, 含 k_1^m 之各項等于 k_1^m 乘其余因子設为 A, 則

$$A=(-1)^i\begin{vmatrix} 1 & k_2 & \cdots & k_2^{i-1} & k_2^{i+1} & \cdots & k_2^{m-1} \\ 1 & k_3 & \cdots & k_3^{i-1} & k_3^{i+1} & \cdots & k_3^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & k_m & \cdots & k_m^{i-1} & k_m^{i+1} & \cdots & k_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

显然 A 中有且只有一項 $\pm k_2k_3^2\cdots k_i^{i-1}k_{i+1}^{i+1}\cdots k_{m-1}^{m-1}$, 其正、負号只能取一个. 此項是按下标增加、指数亦增加而排列. 当 $i\neq j$ 时, 又易知 $\pm k_2k_3^2\cdots k_i^{i-1}k_{i+1}^{i+1}\cdots k_{m-1}^{m-1}$ 不含在 $\Delta_{(j,2)}$ 中. 而

$$\left.\begin{aligned} & b_0+b_1\sqrt{-1}+\cdots+b_{m-1}(\sqrt{-1})^{m-1}+b_m(\sqrt{-1})^m+b_n(\sqrt{-1})^n= \\ & =-b_m\left\{\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{(0,2)}+\Delta_{(1,2)}\sqrt{-1}+\cdots+\Delta_{(m-1,2)}(\sqrt{-1})^{m-1}\right]+\right. \\ & \left.\quad+(\sqrt{-1})^m+(\sqrt{-1})^n\right\}+\text{不含 } b_m \text{ 之項}. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

現在要証明 b_m 之系数不等于零. 由分解因子, 即知 $\Delta_{(i,2)}$ 为 Δ 所除尽. 其商又含 $k_1,\cdots,k_m$ 中之文字, 即不为常数. 又 $\Delta_{(i,2)}$ 之 $\pm k_2k_3^2\cdots k_i^{i-1}k_{i+1}^{i+1}\cdots k_{m-1}^{m-1}$ 不含在 $\Delta_{(j,2)}$ 中. $j\neq i$, j 为 $1,2,\cdots,m-1$ 中之任一值. 故(2.12)中[…]內不为零, 且易知 b_m

之系数不为零．故使(2.12)为零之 b_m 之値至多只有一个．今选择实数 b_m 使(2.12)不为零．由此选定之 b_m 代入(2.9)而得 $b_0, \cdots, b_{m-1}$，就知(2.10)及(2.11)都成立．换言之，

$$b_0 + b_1k + \cdots + b_nk^n = 0, \quad \phi(k) = 0 \tag{2.13}$$

无公根．

令

$$a_{n-i} = b_{n-i-1} + (-1)^iS_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

即

$$b_{n-i-1} - a_{n-i} = -(-1)^iS_{i+1}, \quad 但\ b_{-1} = 0, \tag{2.14}$$

故各 a 皆为 $k_1, \cdots, k_m$ 之已知函数(即不含 k)．由(2.6)，(2.14)得

$$\phi(k) \equiv b_nk^{n+1} + (b_{n-1} - a_n)k^n + \cdots + (b_{n-i-1} - a_{n-i})k^{n-i} + \cdots - a_0 \equiv$$
$$\equiv (b_0 + b_1k + \cdots + b_nk^n)k - (a_0 + a_1k + \cdots + a_nk^n). \tag{2.15}$$

由(2.13)，即知

$$b_0 + b_1k + \cdots + b_nk^n = 0, \ a_0 + a_1k + \cdots + a_nk^n = 0 \tag{2.16}$$

无公根．今由上面所决定之 a 及 b (均不含 k)，作微分方程

$$y' = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n}{b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \cdots + b_ny^n}, \tag{2.17}$$

而由(2.17)易知 $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n$，$b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \cdots + b_ny^n$ 无公因子．因此，(2.17)属于方程(1)．

下面我們要証明(2.17)之积分曲綫之类型所对应之排列为 $[\lambda_m, \cdots, \lambda_1]$．設

$$f(k) = \frac{a_0 + a_1k + \cdots + a_nk^n}{b_0 + b_1k + \cdots + b_nk^n}, \tag{2.18}$$

由(2.15)得

$$f(k) = k - \frac{\phi(k)}{R(k)}, \ 其中\ R(k) = b_0 + b_1k + \cdots + b_nk^n.$$

因 $\phi(k_i) = 0$，$R(k_i) \neq 0$，故 $f(k_i) = k_i$，所以 $y = k_ix$ 为(2.18)之不变直綫，且

$$f'(k_i) = 1 - \frac{\phi'(k_i)}{R(k_i)}, \tag{2.19}$$

若又有 $\phi'(k_i) = 0$，則

$$f''(k_i) = -\frac{\phi''(k_i)}{R(k_i)}. \tag{2.20}$$

因此，当 $\lambda_i = 1$，則由(2.5)，(2.7)得 $\mu_i = 1, \alpha_i = \frac{1}{2}$．由(2.6)知 k_i 为 $\phi(k) = 0$ 之单根(因 $\mu_i = 1$)．因此，$\phi'(k_i) \neq 0$．由(2.8)得

$$R(k_i) = \frac{-\phi'(k_i)}{\alpha_i} = \frac{-\phi'(k_i)}{\frac{1}{2}},$$

代入(2.19)得

$$f'(k_i) = 1 - \frac{\phi'(k_i)}{R(k_i)} = 1 + \frac{1}{2} > 1.$$

若 $\lambda_i = 2$，由(2.5)，(2.7)得 $\mu_i = 1$，$\alpha_i = -\frac{1}{2}$，同样得

$$f'(k_i) = 1 - \frac{1}{2} < 1.$$

若 $\lambda_i = 3$，由(2.5)，(2.7)知 $\mu_i = 2$，$\alpha_i = +\frac{1}{2}$. 由 (2.6) 知 k_i 为 $\phi(k) = 0$ 之二重根(因 $\mu_i = 2$). 故 $\phi'(k_i) = 0$，由(2.8)，(2.20)得

$$f''(k_i) = \frac{1}{2} > 0.$$

若 $\lambda_i = 4$，由(2.5)，(2.7)得 $\mu_i = 2$，$\alpha_i = -\frac{1}{2}$. 同样得

$$f'(k_i) = 0,\ f''(k_i) = -\frac{1}{2} < 0.$$

綜合上面所論，故知 (2.18) 之积分曲綫在 $y = k_ix$ 附近两側之类型記号为"λ_i". 因此，(2.11)之积分曲綫之类型相应之排列为 $[\lambda_m, \cdots, \lambda_1]$. 故得本定理之証.

定理 2.3. 設 $n_1(\geqslant 0)$，$n_2(\geqslant 1)$ 为正整数，$n_1 + n_2 = n + 1$，今以 n_1 个 1，n_2 个 2 任作一排列 A. 則方程(1)中有一积分曲綫之类型其相应之排列为 A.

不失一般性質，可設此排列 A 为 $[\lambda_1, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_2]$，此中 $\lambda_1 = 2$. 又任取 n 个数 $k_2, \cdots, k_{n+1}$ 于下

$$0 = k_2 < k_3 < \cdots < k_{n+1}. \qquad (k_1 = \infty)$$

又定义

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_{i+1} = \begin{cases} -1, \text{当 } \lambda_{i+1} = 2 \text{ 时}. \ i = 1, 2, \cdots, n, \\ 1 + \dfrac{2n_1}{n_2 + 1}, \text{当 } \lambda_{i+1} = 1 \text{ 时}. \end{cases} \tag{2.21}$$

故有

$$\frac{1}{\alpha_1 - 1} = \frac{1}{\alpha_2 - 1} + \frac{1}{\alpha_3 - 1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}. \tag{2.22}$$

令

$$\begin{aligned} \phi(k) &\equiv (1 - \alpha_1)[k(k - k_3)(k - k_4)\cdots(k - k_{n+1})] \equiv \\ &\equiv (1 - \alpha_1)[k^n - S_1k^{n-1} + S_2k^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}S_{n-1}k], \end{aligned} \tag{2.23}$$

并設 $b_{n-1} = 1$，并由下列方程組

$$\left.\begin{aligned} b_0 + b_1k_3 + \cdots + b_{n-2}k_3^{n-2} &= \frac{-\phi'(k_3)}{\alpha_3 - 1} - b_{n-1}k_3^{n-1}, \\ b_0 + b_1k_4 + \cdots + b_{n-2}k_4^{n-2} &= \frac{-\phi'(k_4)}{\alpha_4 - 1} - b_{n-1}k_4^{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ b_0 + b_1k_{n+1} + \cdots + b_{n-2}k_{n+1}^{n-1} &= \frac{-\phi'(k_{n+1})}{\alpha_{n+1} - 1} - b_{n-1}k_{n+1}^{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

决定 $b_0, \cdots, b_{n-2}$. 因

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & k_3 & \cdots & k_3^{n-2} \\ 1 & k_4 & \cdots & k_4^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & k_{n+1} & \cdots & k_{n+1}^{n-2} \end{vmatrix} \neq 0,\ (\text{因 } k_3 < k_4 < \cdots < k_{n+1})$$

故 $b_0, \cdots, b_{n-2}$ 完全决定（且唯一），又因 k_i 为 $\phi(k)=0$ 之单根，故 $\phi'(k_i)\neq 0$, $i=2, \cdots, n+1$. 随之有

$$b_0+b_1k_i+\cdots+b_{n-1}k_i^{n-1}\neq 0,\ i=3,\cdots,n+1. \tag{2.25}$$

在 IV 之(4.9)，証明了($k_{i+2}=x_i$, $i=1,2,\cdots,n-1$) 下式：

$$b_0=(-1)^n(\alpha_1-1)k_3k_4\cdots k_{n+1}\left[\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{\alpha_i-1}-\frac{1}{\alpha_1-1}\right].$$

故 $b_0\neq 0$. 結合(2.25)，即知

$$b_0+b_1k+\cdots+b_{n-1}k^{n-1}=0,\ \phi(k)=0 \tag{2.26}$$

无公根.

令 $$a_0=0,\ a_n=\alpha_1,\ 及$$

$$a_{n-i}=b_{n-i-1}-(-1)^i(1-\alpha_1)S_i, \tag{2.27}$$

即

$$(-1)^i(1-\alpha_1)S_i=b_{n-i-1}-a_{n-i},\ \ i=1,2,\cdots,n-1.$$

由(2.23)，(2.27)得

$$\phi(k)\equiv(b_0+b_1k+\cdots+b_{n-1}k^{n-1})k-(a_1k+\cdots+a_nk^n).$$

由(2.26)即得

$$b_0+b_1k+\cdots+b_{n-1}k^{n-1}=0,\quad a_1k+\cdots+a_nk^n=0, \tag{2.28}$$

无公根，作微分方程

$$y'=\frac{a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_{n-1}xy^{n-1}}, \tag{2.29}$$

因 $b_0\neq 0$，及(2.28)，即知 $a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n$, $b_0x^n+\cdots+b_{n-1}xy^{n-1}$ 无公因子，所以(2.29)属于(1). 令

$$f(k)=\frac{a_1k+\cdots+a_nk^n}{b_0+b_1k+\cdots+b_{n-1}k^{n-1}},$$

则

$$f(k)=k-\frac{\phi(k)}{R(k)},\quad R(k)=b_0+b_1k+\cdots+b_{n-1}k^{n-1}.$$

因 $\phi(k_i)=0$, $i=2,3,\cdots,n+1$. 故 $f(k_i)=k_i$，因此，$y=k_ix$ 为 (2.29) 之不变直綫.显然 $x=0$ 亦为(2.29)之一不变直綫.又 k_i 为 $\phi(k)=0$ 之单根，故 $\phi'(k_i)\neq 0$，故

$$f'(k_i)=1-\frac{\phi'(k_i)}{R(k_i)}$$

或

$$R(k_i)=\frac{-\phi'(k_i)}{f'(k_i)-1}. \tag{2.30}$$

比較(2.30)，(2.24)，即得 $f'(k_i)=\alpha_i$, $\quad i=3,\cdots,n+1$. 而

$$f'(\infty)=\frac{a_n}{b_{n-1}}=\frac{\alpha_1}{1}=\alpha_1=2,$$

又設 $f'(0)=\bar{\alpha}_2$，在 IV 这一节，証明了($\bar{\alpha}_2$ 即相当于 IV 中之 α_2)

$$\frac{1}{\alpha_1-1}=\frac{1}{\bar{\alpha}_2-1}+\frac{1}{\alpha_3-1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{n+1}-1}. \tag{2.31}$$

比較 (2.31), (2.22), 即得 $\bar{\alpha}_2=\alpha_2$. 因此, 方程 (2.29) 之积分曲綫之类型相应之排列为 $[2, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_1]$.

III. 积分曲綫分布不同类型的数目.

在II中, 我們知道有一积分曲綫, 就有一且只一排列与之对应, 又由定理 2.2, 定理 2.3 知道若有 n_1 个 1, n_2 个 2, n_3 个 3, n_4 个 4 且 $n+1-(n_1+n_2+2n_3+2n_4)$ 为偶数或零时, 以此等数字任作一排列, 则必有一且只一积分曲綫与之对应. 設积分曲綫 L_1 所对应之排列有 n_1 个 1, n_2 个 2, n_3 个 3, n_4 个 4, 则由定理 2.1 知 $n+1-(n_1+n_2+2n_3++2n_4)$ 为正偶数或零. 設积分曲綫 L_2 所对应之排列为 $B(1, 2, 3, 4)$. 将 L_2 反折而得一积分曲綫 L_2^{-1}. 在此反折变换中, 不变直綫附近之积分曲綫类型原为"3"("4")的, 变为"4"("3"). 本文中所指之排列若不另加声明, 通指环形排列. 故有

积分曲綫 L_2, L_1 是否同类, 須看 L_2, L_2^{-1} 相应之排列中是否有一个与 L_1 相应之排列同类而定 (即是否属于同一排列). 亦即看 $B(1, 2, 3, 4)$, $B(1, 2, 4, 3)$ 中是否有一与 L_1 之排列 $A(1, 2, 3, 4)$ 同类(計方向之环形排列)而定.

若 L_2, L_1 相应之排列, 設为 $A(1, 2)$, $B(1, 2)$ 即皆不含 3, 4. 则 L_2, L_1 是否同类, 只須看 $A(1, 2)$, $B(1, 2)$ 是否同类(不計方向)而定. 因此时 L_2^{-1} 之排列为 $B^{-1}(1, 2)$ 即将 $B(1, 2)$ 繞其直径反折而得之排列. 而 $B^{-1}(1, 2)$ 与 $B(1, 2)$ 在不計方向之假設下, 算为同类排列. 排列中含有相同的数字, 其理相同.

一般言之, 两积分曲綫虽同类, 但其相应之排列却不同类 (計方向或不計方向). 因此, 对积分曲綫不同类型之数目的計算, 就不簡單了.

下面先介紹环形排列的問題.

設有 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 为 m 个正整数, $n=n_1+\cdots+n_m$. g 为 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 之 $g.c.d.$ $\sum\limits_{\delta}$ 是当 δ 历經 g 之正整数因子 (包括 1, g) 所取之和. $\varphi(\delta)$ 乃尤拉之 φ-函数 (即小于 δ 而与 δ 互質的个数). 設 R 为全实数之集和, I 为集合 $[0, 1, 2, \cdots]$, 玆定义

$$f(x_1, \cdots, x_m)=\begin{cases}0, \text{当 } x_1, \cdots, x_m \text{ 全为零, 或其中有一个属于集合 } R-I \text{ 时.}\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{\delta}\dfrac{\left(\dfrac{n_1}{\delta}+\cdots+\dfrac{n_m}{\delta}\right)!}{\left(\dfrac{n_1}{\delta}\right)!\cdots\left(\dfrac{n_m}{\delta}\right)!}\varphi(\delta), \quad \text{当 } x_1=n_1, \cdots, x_m=n_m \text{ 时.}\end{cases} \tag{3.1}$$

$$h(x_1, \cdots, x_m)=\begin{cases}0, \text{当 } x_1, \cdots, x_m \text{ 全为零, 或其中有一个属于集合 } R-I \text{ 时.}\\ 0, \text{当 } x_1=n_1, \cdots, x_m=n_m, \text{ 且有三个或更多个之 } n_i\equiv d\\ \quad (\mathrm{mod.}\ 2d). \ d \text{ 乃 } g \text{ 之正因子.}\\ \dfrac{\left\{\left[\dfrac{n_1}{2d}\right]+\cdots+\left[\dfrac{n_m}{2d}\right]\right\}!}{\left[\dfrac{n_1}{2d}\right]!\cdots\left[\dfrac{n_m}{2d}\right]!}, \quad \begin{matrix}\text{当 } x_1=n_1, \cdots, x_m=n_m, \text{ 且不}\\ \text{合于第二情况.}\end{matrix}\end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $\left[\dfrac{n_1}{2d}\right]$ 为小于或等于 $\dfrac{n_1}{2d}$ 之最大正整数或 0 $\left(\text{如}\left[\dfrac{1}{2}\right]=0, \left[\dfrac{3}{2}\right]=1\right)$.

林鹤一証明了

引理 1. 以 n_1 个 a_1, n_2 个 a_2, $\cdots$, n_m 个 a_m 組成定向（計方向）之环形排列之个数为 $f(n_1, \cdots, n_m)$.

其証見傅种孙之論文．循环排列問題[4]．又傅种孙証明了[4]

引理 2. 以 n_1 个 a_1, n_2 个 a_2, $\cdots$, n_m 个 a_m 組成不計方向之环形排列之个数为

$$\frac{1}{2}\{f(n_1, \cdots, n_m) + h(n_1, \cdots, n_m)\}.$$

下面还要証明另一个定理即引理 3．

設 n_1 个 a_1, n_2 个 a_2, $\cdots n_m$ 个 a_m, $n = n_1 + \cdots + n_m$, 今将該 n 个文字布列于一定正 n 边形 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 之頂点 $V_1, \cdots, V_n$（視为 n 个固定之位置）上，其排列的集合以 G 表之，其个数則为

$$\frac{(n_1 + \cdots + n_m)!}{n! \cdots n!}.$$

設 g 为 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 之 $g.c.d.$ 而 d 为 g 之正因数，在 G 之各排列中經旋轉 $\frac{2k\pi}{d}$, $k = 0, \cdots, d-1$ 而仍与本身重合之排列其集合以 $G(d)$ 表之，則 $G(d)$ 中排列之个数为

$$\frac{\left(\frac{n_1}{d} + \cdots + \frac{n_m}{d}\right)!}{\left(\frac{n_1}{d}\right)! \cdots \left(\frac{n_m}{d}\right)!}$$

（参考[4]之II），在 $G(d)$ 之排列中經反折（即有一对称軸的）而仍与本身重合之排列其集合以 $H(d)$ 表之，$H(d)$ 中之排列之个数为 $2h(d)$（参考 [4] 之 VI）．在 $H(1)$ 之 $2h(1)$ 个排列中可分为 $h(1)$ 对，使同对二排列可以旋轉而重合（即互变），而异对者則不可能（参考[4]之VII）．因此，容易知道，同对之二排列必同属于一集合 $G(d)$．故有

（一）在 $H(d)$ 之 $2h(d)$ 个排列中可分为 $h(d)$ 对，使同对二排列可以旋轉而重合．

（二）在 G 之諸排列中，經旋轉 $\frac{2k\pi}{d}$, $h = 0, 1, 2, \cdots, d-1$ 而能与本身重合，且又經过反折亦与本身重合，如斯之排列之集合以 $\overline{H}(d)$ 表之（二排列經旋轉而重合者只取其一），則 $\overline{H}(d)$ 中排列之个数为 $h(d)$．

（三）設 $p_1 p_2 d$ 能除尽 g，且 p_1, p_2 为質数，則

$$\overline{H}(p_1 d)\,\overline{H}(p_2 d) \equiv \overline{H}(p_1 p_2 d),$$

即 $\overline{H}(p_1 d)$, $\overline{H}(p_2 d)$ 之公共排列（經旋轉可重合之排列只取其一）之集合为 $\overline{H}(p_1 p_2 d)$．

这因为，当排列 $A \in \overline{H}(p_1 d)$，則 $A \in G(p_1 d)$，又若 $A \in \overline{H}(p_2 d)$，則 $A \in G(p_2 d)$，因之，$A \in G(p_1 p_2 d)$．（参考[4] 之 III），今 A 反折（即有一对称軸）仍为 A．故 $A \in \overline{H}(p_1 p_2 d)$ 或則 A 与 $\overline{H}(p_1 p_2 d)$ 中之某一排列經旋轉而重合．反之 $\overline{H}(p_1 p_2 d)$ 中任一排列必属于 $\overline{H}(p_1 d)$, $\overline{H}(p_2 d)$ 或与其中之某一排列經旋轉而重合．

引理 3. 設 $n_1, n_2, \cdots, n_m, (m > 1)$ 之 $g.c.d$ 为 g，g 之不同正質因数(>1)为 $p_1, p_2, \cdots, p_\lambda$．今以 n_1 个 a_1, n_2 个 a_2, $\cdots$, n_m 个 a_m 組成之諸排列中，其能經旋轉 $\frac{2k\pi}{d}$, $(k = 0, 1, \cdots,$

$\cdots, d-1$, d 为 g 之因数,且 $d > 1$), 而与本身重合,又經反折(即至少有一对称軸)亦与本身重合之不同排列(二排列經旋轉而重合时,只計算一个)之个数为

$$F(n_1, \cdots, n_m) = \sum_{p_1} h(p_1) - \sum_{p_1,p_2} h(p_1p_2) + \sum_{p_1,p_2,p_3} h(p_1p_2p_3) - \cdots,$$

其中

$$\sum_{p_1} h(p_1) = h(p_1) + \cdots + h(p_\lambda),$$

$$\sum_{p_1,p_2} h(p_1p_2) = h(p_1p_2) + h(p_1p_3) + \cdots + h(p_{\lambda-1}p_\lambda),$$

余类推.

証. 因 d 必含 $p_1, \cdots, p_\lambda$ 之一,故本定理中所述之排列必包含在 $\bar{H}(p_1), \cdots, \bar{H}(p_\lambda)$ 中,但 $\bar{H}(p_1)$, $\bar{H}(p_2)$ 有 $\bar{H}(p_1p_2)$ 公共,故

$$\bar{H}(p_1) + \{\bar{H}(p_2) - \bar{H}(p_1p_2)\} \tag{1}$$

中之排列无相重复. 因此,其个数为 $h(p_1) + [h(p_2) - h(p_1p_2)]$, 又 $\bar{H}(p_1p_3)$, $\bar{H}(p_1p_2)$ 包含在 $\bar{H}(p_1) + \bar{H}(p_2)$ 中,因此,

$$\bar{H}(p_1) + \{\bar{H}(p_2) - \bar{H}(p_1p_2)\} + \{\bar{H}(p_3) - [\bar{H}(p_1p_3) + (\bar{H}(p_2p_3) - \bar{H}(p_1p_2p_3))]\} \tag{2}$$

中之排列无相重复,且包括 $\bar{H}(p_1)$, $\bar{H}(p_2)$, $\bar{H}(p_3)$ 之排列,显然集合 (2) 中排列之个数为

$$h(p_1) + h(p_2) - h(p_1p_2) + \{h(p_3) - [h(p_1p_3) + (h(p_2p_3) - h(p_1p_2p_3))]\} =$$
$$= h(p_1) + h(p_2) + h(p_3) - [h(p_1p_2) + h(p_2p_3) + h(p_3p_1)] + h(p_1p_2p_3).$$

依此类推,即得所求之証.

定理 3.1. 設微分方程 (1) 之积分曲綫之类型其相应之排列中之数字只有 α 个 1, $p-\alpha$ 个 2, β 个 3, $m-p-\beta$ 个 4, 其中 $m < n+1$, $p < m$, $\beta \neq \frac{m-p}{2}$, 則如斯之积分曲綫不同类型之数目为 $f(\alpha, p-\alpha, \beta, m-p-\beta)$.

今将此等积分曲綫 (同类型的只取一个) 之集合以 G 表之, G 中每一积分曲綫所对应之排列之集合以 B 表之. 显然 B 中任二排列为不同类(計方向),由 α 个 1, $p-\alpha$ 个 2, β 个 3, $m-p-\beta$ 个 4 組成各不同之排列 (計方向) 之集合以 $\bar{B}$ 表之, 故 $\bar{B} \supseteq B$, 而由定理 2.2, 知

$$n + 1 - [\alpha + p - \alpha + 2\beta + 2(m - p - \beta)] = 2q \geqslant 0.$$

又由定理 2.4,知 $\bar{B}$ 中任一排列 π, (1) 中有一积分曲綫之类型其相应之排列为 π. 此积分曲綫設为 L_1 显然与 G 中某一积分曲綫 L_2 重合或同类. 因此, π 必与 B 中某一排列同类(計方向), 否則 L_1^{-1} 相应之排列必与 B 中某一排列同类,由于 $\beta \neq \frac{m-p}{2}$, L_1^{-1} 相应之排列中有 $\frac{m-p-\beta}{2}$ 个 3, β 个 4, 所以 L_1^{-1} 相应之排列不属于 B, 因而发生矛盾, 故必 π 属于 B, 即 $\bar{B} \subseteq B$, 故 $B = \bar{B}$, 但 $\bar{B}$ 中排列(計方向)之数目为 $f(\alpha, p-\alpha, \beta, m-p-\beta)$ (由引理 1). 故得本定理之証.

定理 3.2. 設微分方程 (1) 之积分曲綫之类型其相应之排列中之数字只有 α 个 1, $m-\alpha$ 个 2, $m \leqslant n+1$, 其中 $\alpha \neq 0, m$. 則如斯之积分曲綫不同类型之数目为

$\frac{1}{2}[f(\alpha,m-\alpha)+h(\alpha,m-\alpha)]$.

今将此等积分曲綫(同类型的只取一个)之集合以G表之,G中每一积分曲綫所对应之排列之集合以B表之. 設L_1, L_2为G中二积分曲綫,其相应之排列分別設为π_1, π_2. 因π_2不含数字3, 4. 設L_2^{-1}相应之排列为π_2^{-1},則π_2^{-1}在不計方向时与π_2同类. 且L_2, L_2^{-1}同类. 若π_1与π_2或π_2^{-1}在不計方向时同类,則必有L_1, L_2同类,此不可能,故π_2与π_1不同类(不計方向).故B中之排列数目等于G中积分曲綫之数目. 其次以α个1, $m-\alpha$个2任作一排列π,則(1)中必有一积分曲綫L其类型所对应之排列为π(定理2.4). 显然L与G中某一排列設为L_1同类. 因此π必与π_1同类(不計方向),这就說明B中之排列系将α个1, $m-\alpha$个2所組之各排列(不計方向,同类之排列只取一个).故由引理2,知B中排列数目为$\frac{1}{2}[f(\alpha,m-\alpha)+h(\alpha,m-\alpha)]$. 故得本定理之証.

系. 若本定理中之$\alpha=0$或$m\leqslant n+1$,則如斯之积分曲綫之类型至多有一.

定理3.3. 設微分方程(1)之积分曲綫之类型其相应之排列中之数字有α个1, $p-\alpha$个2, β个3, β个4, $0<\beta=\frac{m-p}{2}$,即$m-p$为偶数时,則如斯之积分曲綫不同类型之数目为

$$\frac{1}{2}\{f(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)+F(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)\}.$$

証. 今以α个1, $p-\alpha$个2, β个3, β个4所組成之环形排列(計方向)之集合(二排列經旋轉而重合的,只取一)以G表之,則G中排列之数目为$f(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)$(引理1).

今于G中任取一排列$A_1(1,2,3,4)$,作下之四排列

$A_1(1,2,3,4)$, $A_1^{-1}(1,2,3,4)$, $A_1(1,2,4,3)$, $A_1^{-1}(1,2,4,3)$,

其中$A_1^{-1}(1,2,3,4)$乃将$A(1,2,3,4)$經反折而得之排列,此四排列之集合以G_1記之,称为A_1之傍系,显然$A_1^{-1}(1,2,3,4)$, $A_1(1,2,4,3)$, $A_1^{-1}(1,2,4,3)$之傍系仍为G_1,我們用記号"$\equiv$"表两排列同类(即經旋轉可以重合).

故 若$A_1(1,2,3,4)\equiv A_1^{-1}(1,2,3,4)$,則$A_1(1,2,4,3)\equiv A_1^{-1}(1,2,4,3)$.

若$A_1(1,2,3,4)\equiv A_1(1,2,4,3)$, 則$A_1^{-1}(1,2,3,4)\equiv A_1^{-1}(1,2,4,3)$.

若$A_1^{-1}(1,2,3,4)\equiv A_1(1,2,4,3)$, 則$A_1(1,2,3,4)\equiv A_1^{-1}(1,2,4,3)$.

若G_1中有三排同类,則第四排亦同属此类.

但$A_1(1,2,3,4)$与$A_1^{-1}(1,2,4,3)$所代表之积分曲綫同类, $A_1^{-1}(1,2,3,4)$与$A_1(1,2,4,3)$所代表之积分曲綫同类,因此:

当G_1中有四个不同排列时,其相应之积分曲綫之类型有两类,当G_1中只有两个不同排列时,其相应之积分曲綫只有一类. 而当G_1中四排列皆为相同时,其相应之积分曲綫有一类.

今以G_1中不同排列之数目称为G_1之元数,以g_1記之. 故当$g_1=1$时,G_1中之排列其相应之积分曲綫之类型只有一,当$g_1\neq 1$时,(g_1不为3),G_1中之排列其相应之积分曲綫之类型数目有$\frac{g_1}{2}$.

今将 G_1 中經过旋轉 $\frac{2k\pi}{d}$, $k=0,1,\cdots,d-1$, $d>1$, 而能与本身重合，又經过反折亦与本身重合之排列之集合以 $\bar{G}$ 記之. 則 $\bar{G}$ 之排列个数为 $F(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)$ (引理 3). 在 $G-\bar{G}$ 中之排列能旋轉(或反折)与其本身重合时,則反折(或旋轉)不能与本身重合. 今于 $G-\bar{G}$ 中任取一排列 $A_1(1,2,3,4)$, 作其傍系 G_1, 于 $(G-\bar{G})-G_1$ 中任取一排列, $A_2(1,2,3,4)$, 作其傍系 G_2. 容易知道, G_1, G_2 无公共之排列,又于 $[(G-\bar{G})-G_1]-G_2$ 中任取一排列 $A_3(1,2,3,4)$, 作傍系 G_3, 依此类推,得

$$G-\bar{G}=G_1+G_2+\cdots+G_\lambda.$$

而且 G_i, $G_j(i\neq j)$ 无公共之排列. 命 g_i 为 G_i 之元数(即不同排列之个数). 則 $G-\bar{G}$ 之元数为 $g_1+g_2+\cdots+g_\lambda$. 故由引理 1 及引理 3 ,得

$$g_1+g_2+\cdots+g_\lambda=f(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)-F(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta).$$

由于 $g_i\neq 1$, 故 G_i 中各排列所对应之积分曲綫不同类型之数目为 $\frac{1}{2}g_i$, 故 $G-\bar{G}$ 中之排列所对应之积分曲綫不同类型之数目为 $\frac{1}{2}(g_1+g_2+\cdots+g_\lambda)$ 即:

$$\frac{1}{2}\{f(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)-F(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)\}.$$

而 $\bar{G}$ 中之排列,每一排列属于一傍系,二不同之排列属于二不同之傍系,其相应之积分曲綫之类型亦不同. 故 $\bar{G}$ 之排列所对应之积分曲綫不同类型之数目为 $F(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)$. 因此, G 中之排列所对应之积分曲綫不同类型数目为

$$\frac{1}{2}\{f(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)-F(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)\}+F(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)=$$
$$=\frac{1}{2}\{f(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)+F(\alpha,p-\alpha,\beta,\beta)\}.$$

为以下研究的方便,我們还須介紹两个函数. 設 m, p, α 为正整数或零.

$$\phi(m,p,\alpha)=\begin{cases}\sum_{\beta=0}^{e}f(\alpha,p-\alpha,\beta,m-p-\beta), \text{当 } m-p=2e+1 \text{ 为奇数}, p<m.\\ \sum_{\beta=0}^{e-1}f(\alpha,p-\alpha,\beta,m-p-\beta)+\frac{1}{2}[f(\alpha,p-\alpha,e,e)+F(\alpha,p-\alpha,e,e)],\\ \quad \text{当 } m-p=2e \text{ 为偶数}, p<m.\\ \frac{1}{2}[f(\alpha,m-\alpha)+h(\alpha,m-\alpha)], \text{当 } p=m.\end{cases} \tag{3.3}$$

$$\psi(m,p)=\sum_{\alpha=0}^{p}\phi(m,p,\alpha). \tag{3.4}$$

定理 3.4. 設微分方程 (1) 之积分曲綫所对应之排列有 α 个 1 , $p-\alpha$ 个 2 , 其中 3 及 4 的个数之和为 $m-p(\geqslant 0)$, 則如斯之积分曲綫不同类型之数目为 $\phi(m,p,\alpha)$, 但 $m<n+1$.

証. 1°, 若 $m-p=0$, 則由定 3. 2 即得本定理之証.

2°, 若 $m-p>0$, (a) 当 $m-p=2e+1$ 为奇数时, 今先考查积分曲綫所对应之

排列有α个1，$p-\alpha$个2，β个3，$m-p-\beta$个4，其中$\beta \leqslant e$，这些排列之集合以$\mathscr{A}(\beta)$記之，其元数为$f(\alpha, p-\alpha, \beta, m-p-\beta)$ (引理1)．若$\beta=0$，则$\mathscr{A}(0)$之元数(由引理1)为

$$f(\alpha, p-\alpha, m-p)=f(\alpha, p-\alpha, 0, m-p) \quad \text{(再由定义即得)}.$$

又若$\alpha=0$或p，$\mathscr{A}(\beta)$之元数仍为$f(\alpha, p-\alpha, \beta, m-p-\beta)$．又对应于$\mathscr{A}(\beta)$之排列之积分曲綫不同类型之数目亦为$f(\alpha, p-\alpha, \beta, m-p-\beta)$．設$\beta_1<\beta_2<e$，今于$\mathscr{A}(\beta_1)$中任取一排$A_1$，又于$\mathscr{A}(\beta_2)$中任取一排$A_2$，显然$A_1$，$A_2$不同属于同一排列(即經旋轉不能重合)，又将$A_1$反折后成$A_1^{-1}$，在$A_1^{-1}$中有$m-p-\beta_1$个3，而$A_2$中有$\beta_2$个3，

$$m-p-\beta_1=2e+1-\beta_1=e+1+(e-\beta_1) \geqslant e+1>\beta_2,$$

故A_1^{-1}与A_2为不同之排，故A_1，A_2所对应之积分曲綫为不同类型，因此，所求証之积分曲綫不同类型之数目至少为

$$\phi(m, p, \alpha)=\sum_{\beta=0}^{e} f(\alpha, p-\alpha, \beta, m-p-\beta).$$

今設$\beta_3>e$，又于$\mathscr{A}(\beta_3)$中任取一排$A_3(1,2,3,4)$，今将排列$A_3(1,2,4,3)$反折而得排$A_3^{-1}(1,2,4,3)$，于是$A_3(1,2,3,4)$与$A_3^{-1}(1,2,4,3)$所对应之积分曲綫同类，但$A_3(1,2,4,3)$，其中有$m-p-\beta_3$个3，β_3个4，故$A_3^{-1}(1,2,4,3)$中亦有$m-p-\beta_3$个3，β_3个4，故$A_3^{-1}(1,2,4,3)$属于$\mathscr{A}(m-p-\beta_3)$，而$m-p-\beta_3=2e+1-\beta_3=(e+1-\beta_3)+e \leqslant e$，因此，$\mathscr{A}(\beta_3)$之排列所对应之积分曲綫之类型已計算过了，故所求証之积分曲綫不同类型之数目为$\phi(m, p, \alpha)$．

(b) 若$m-p=2e$，当$\beta<e$，对应于$\mathscr{A}(\beta)$之排列之积分曲綫不同类型有$f(\alpha, p-\alpha, \beta, m-p-\beta)$个，但当$\beta=e$，则对应于$\mathscr{A}(\beta)$之排列之积分曲綫不同之类型有

$$\frac{1}{2}\{f(\alpha, p-\alpha, e, e)+F(\alpha, p-\alpha, e, e)\}. \quad \text{(引理3.4)}$$

再仿2°之証法，即得所求之証．

綜上所述，故得所求之証．

系1． 設微分方程(1)之积分曲綫所对应之排列其中出現文字1，2个数之和为p．文字3，4个数之和为$m-p(\geqslant 0)$．則如斯之积分曲綫不同类型之数目为$\psi(m, p)$．但$m<n+1$．

因取$\alpha=0, 1, \cdots, p$时，$\phi(m, p, \alpha)$之和即得．

若微分方程(1)之积分曲綫所对应之排列，其中有α个1，$p-\alpha$个2，β个3，$m-p-\beta$个4．则由(2.4)有

$$\alpha+p-\alpha+2\beta+2(m-p-\beta)+\nu=n+1,$$

其中ν为偶数(>0)或零．所以

$$p \equiv n+1 \pmod{2}, \tag{3.5}$$

及

$$2m+\nu-(n+1)=p \leqslant m,$$

即

$$2m - (n+1) \leqslant p \leqslant m. \tag{3.6}$$

系 2. 設 n 为奇数，且微分方程(1)之积分曲綫有 m 个不变直綫 $(n+1 > m > 0)$。則如斯之积分曲綫不同类型之数目为

$$P(m) = \sum_{k=\tau(m)}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \psi(m, 2k),$$

其中 $\left[\frac{m}{2}\right]$ 乃小于或等于 $\frac{m}{2}$ 之最大整数或零. 及

$$\tau(m) = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \leqslant \frac{n+1}{2}, \\ \frac{2m-(n+1)}{2}, & \text{当 } m > \frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

因此时 $n+1$ 为偶数. 由(3.5), 知 $p = 2k$, k 为正整数或零. 又由(3.6), 当 $m \leqslant \frac{n+1}{2}$ 时, k 可取 $0, 1, \cdots, \left[\frac{m}{2}\right]$.

$$\text{当 } m > \frac{n+1}{2} \text{ 时, 而 } 2k = p \geqslant 2m - (n+1),$$

故

$$k \geqslant \frac{2m-(n+1)}{2}.$$

由 $\tau(m)$ 之定义. 故 k 可取 $\tau(m), \tau(m)+1, \cdots, \left[\frac{m}{2}\right]$. 再由系 1, 即得所求之証.

系 3. 設 n 为偶数，且微分方程(1)之积分曲綫有 m 个不变直綫 $(n+1 > m > 0)$，則如斯之积分曲綫不同类型之数目为

$$Q(m) = \sum_{k=e(m)}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \psi(m, 2k-1),$$

其中

$$e(m) = \begin{cases} 1, & \text{当 } m \leqslant \frac{n}{2}, \\ \frac{2m-n}{2}, & \text{当 } m > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

因此时 $n+1$ 为奇数，由 (3.5), $p = 2k-1$, k 为正整数，故 k 可取 $e(m), e(m) + 1, \cdots, \left[\frac{m+1}{2}\right]$. 由(3.6)及系 1, 即得所求之証.

定理 3.5. 設方程 (1) 之积分曲綫具有 $n+1$ 个不变直綫，則如斯之积分曲綫其不同类型之数目为 $\psi(n+1, n+1) - 1$.

証. 不失一般性质，可設方程(1)之积分曲綫其 $n+1$ 个不变直綫为 $x = 0, y = k_i x$, $i = 2, 3, \cdots, n+1$ 且

$$0 = k_2 < k_3 < \cdots < k_{n+1}.$$

此时 (1) 成为

$$y' = \frac{a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n}{b_0 x^n + \cdots + b_{n-1} x y^{n-1}}.$$

令

$$f(k) = \frac{a_1 k + \cdots + a_n k^n}{b_0 + b_1 k + \cdots + b_{n-1} k^{n-1}} \quad (a_n b_0 \neq 0),$$

1°. 若 $b_{n-1} \neq 0$, 則 $f'(\infty) = \frac{a_n}{b_{n-1}} = \alpha_1$;

又令

$$f'(k_i) = \alpha_i \quad (i = 2, \cdots, n+1),$$

在 IV 这一节,証明了下面的公式:

$$\frac{1}{\alpha_1 - 1} = \frac{1}{\alpha_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}.$$

因曲綫在直綫 $x=0$ 附近之类型同为第一类抛物的.故 $0<\alpha_1<1$,由上式,即知 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 中至少有一个小于 1. 即曲綫至少在某一不变直綫附近之类型不能同为第一类抛物的.

2°. 若 $b_{n-1} = 0$, 則有

$$0 = \frac{1}{\alpha_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1},$$

故 $\alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 中至少有一小于 1, 亦即积分曲綫至少在某一不变直綫附近之类型不能同为第一类抛物的.

綜上所述,故知

方程(1)中沒有一个积分曲綫其对应之排列为 $[1, 1, \cdots, 1]$. 即以 $n+1$ 个 1 所組成之排列.

因 $f(n+1, 0) = h(n+1, 0) = 1$, 由定理 2.3 及其系和定理 3.4, 故所求之积分曲綫其不同类型之数目为

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{1}{2} \{f(\alpha, n+1-\alpha) + h(\alpha, n+1-\alpha)\} = \sum_{\alpha=0}^{n} \phi(n+1, n+1, \alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1} \phi(n+1, n+1, \alpha) - 1 = \psi(n+1, n+1) - 1.$$

因为

$$1 = \frac{1}{2} \{f(n+1, 0) + h(n+1, 0)\} = \phi(n+1, n+1, n+1).$$

茲再定义 $P(n+1)$, $Q(n+1)$:

$$P(n+1) = \psi(n+1, n+1) - 1 = Q(n+1).$$

定理 3.6. 設 n 为奇数,方程(1)之积分曲綫其不同类型之数目为

$$2 + \sum_{m=1}^{n+1} P(m).$$

因当(1)之积分曲綫沒有不变直綫时, 則如斯之积分曲綫有两类, 即簡单閉曲綫及螺

旋綫，再由定理 3.4 之系 2 及定理 3.5 即得所求之証.

定理 3.7. 設 n 为偶数，方程(1)之积分曲綫其不同类型之数目为

$$\sum_{m=1}^{n+1} Q(m).$$

因 $n+1$ 为奇数，故积分曲綫一定有不变直綫，再由定理 3.4 之系 3 及定理 3.5，即得所求之証.

IV. $\dfrac{1}{\alpha_1 - 1} = \dfrac{1}{\alpha_2 - 1} + \dfrac{1}{\alpha_3 - 1} + \cdots + \dfrac{1}{\alpha_{n+1} - 1}$ **的証明.**

(这个公式为王志成同志所得)設

$$f(k) = \frac{a_1k + a_2k^2 + \cdots + a_nk^n}{b_0 + b_1k + \cdots + b_{n-1}k^{n-1}}, \tag{4.1}$$

其中分子，分母无公因子. 設 $f(k) - k = 0$，亦即

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} (a_{\lambda+1} - b_\lambda)k^\lambda = 0 \tag{4.2}$$

之 $n-1$ 个单根依次設为 $k_3, k_4, \cdots, k_{n+1}$，并令 $k_1 = \infty$, $k_2 = 0$，而令

$$f'(k_i) = \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n+1.$$

我們要証明

$$\frac{1}{\alpha_1 - 1} = \frac{1}{\alpha_2 - 1} + \frac{1}{\alpha_3 - 1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n+1} - 1}.$$

今以 $x_i = k_{i+2}$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$. 由(4.2)及根与系数的关系，得

$$f'(\infty) = \alpha_1 = \frac{a_n}{b_{n-1}}, \quad f'(0) = \alpha_2 = \frac{a_1}{b_0},$$

及

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_{n-1} - b_{n-2}}{a_n - b_{n-1}} = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i, \\ &\frac{a_{n-2} - b_{n-3}}{a_n - b_{n-1}} = \sum_{1<i_1<i_2<n-1} x_{i_1} x_{i_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{a_1 - b_0}{a_{n-1} - b_{n-1}} = (-1)^{n-1} x_1 x_2 \cdots x_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

由(4.1)得

$$f'(k) = \frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{n-1} (\lambda+1) a_{\lambda+1} k^\lambda}{\sum\limits_{\lambda=0}^{n-1} b_\lambda k^\lambda} - \frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{n-1} a_{\lambda+1} k^\lambda \sum\limits_{\lambda=1}^{n-1} \lambda b_\lambda k^\lambda}{\left(\sum\limits_{\lambda=0}^{n-1} b_\lambda k^\lambda\right)^2}, \tag{4.4}$$

由(4.3)有

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} a_{\lambda+1} k_j^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{n-1} b_\lambda k_j^\lambda, \qquad j = 3, 4, \cdots, n+1.$$

并由(4.4)及簡单計算，得

$$f'(k_{i+2}) = f'(x_i) = 1 + \frac{(a_n - b_{n-1})\sum_{\lambda=0}^{n-1} \lambda \frac{a_{\lambda+1} - b_\lambda}{a_n - b_{n-1}} x_i^\lambda}{\sum_{\lambda=0}^{n-1} b_\lambda x_i^\lambda} \tag{4.5}$$

$(i = 1, 2, \cdots, n-1)$.

又令 $\frac{b_i}{b_{n-1}} = \beta_i,\ f'(x_i) = \theta_i = \alpha_{i+2}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1.$

則由(4.3),(4.5)得

$$f'(x_i) = 1 + \frac{(\alpha_1 - 1)\sum_{\lambda=0}^{n-1} \lambda [(-1)^\lambda \sum x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_\lambda}]\, x_i^\lambda}{\sum_{\lambda=0}^{n-1} \beta_\lambda x_i^\lambda} = \theta_i \tag{4.6}$$

及

$$(\theta_i - 1)\sum_{\lambda=0}^{n-1} \beta_\lambda x_i^\lambda = (\alpha_1 - 1)\sum_{\lambda=0}^{n-1} \lambda [(-1)^\lambda \sum x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_\lambda}] x_i^\lambda, \tag{4.7}$$

在 (4.6) 中若令 $x_i = x_j \quad (j \neq i)$, 即相当于方程 $f(k) = k$ 有重根 x_i, 便得到 $f'(x_i) = 1$ (直接計算也不难得到),因此(4.7)之右端有 $x_i - x_j$ 之因子,故可写成

$$(\alpha_1 - 1)x_i \prod_{j\neq i} (x_i - x_j),$$

$$j = 1, 2, \cdots, n-1$$

由此便得到下之方程組

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{n-2} x_1^{n-2} = \frac{x_1(\alpha_1 - 1)}{\theta_1 - 1} \prod_{j\neq 1} (x_1 - x_j) - x_1^{n-1},\\
&\beta_0 + \beta_1 x_2 + \cdots + \beta_{n-2} x_2^{n-2} = \frac{x_2(\alpha_1 - 1)}{\theta_2 - 1} \prod_{j\neq 2} (x_2 - x_j) - x_2^{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\beta_0 + \beta_1 x_{n-1} + \cdots + \beta_{n-2} x_{n-1}^{n-2} = \frac{x_{n-1}(\alpha_1 - 1)}{\theta_{n-1} - 1} \prod_{j\neq n-1} (x_{n-1} - x_j) - x_{n-1}^{n-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

由行列式的性質,通过簡单的演算,便得

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = \prod (x_i - x_j),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} \\ x_2^{n-1} & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n-1} (x_i - x_j).$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{x_1(\alpha_1-1)}{\theta_1-1}\prod_{j\neq1}(x_1-x_j) & x_1\cdots x_1^{n-2}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{x_{n-1}(\alpha_1-1)}{\theta_{n-1}-1}\prod_{j\neq n-1}(x_{n-1}-x_j) & x_{n-1}\cdots x_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x_1(\alpha_1-1)}{\theta_1-1}\prod_{j\neq1}(x_1-x_j)\cdot\prod_{i\neq1}x_i\cdot\prod_{\substack{i\neq1\\ j\neq1\\ i\neq j}}(x_i-x_j)-$$

$$-\frac{x_2(\alpha_1-1)}{\theta_2-1}\prod_{j\neq2}(x_2-x_j)\cdot\prod_{i\neq2}x_i\cdot\prod_{\substack{i\neq1\\ j\neq2\\ i\neq j}}(x_i-x_j)+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{x_{n-1}(\alpha_1-1)}{\theta_{n-1}-1}\prod_{j\neq n-1}(x_{n-1}-x_j)\cdot\prod_{i\neq n-1}x_i\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-2}(x_i-x_j)=$$

$$=(-1)^n(\alpha_1-1)\prod_{i=1}^{n-1}x_i\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_i-x_j)\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\theta_i-1}.$$

由(4.8)将 β_0 解出,得

$$\beta_0=\frac{\Delta_2-\Delta_1}{\Delta}=(-1)^n(\alpha_1-1)x_1x_2\cdots x_{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\theta_i-1}-\frac{1}{\alpha_1-1}\right].\tag{4.9}$$

由(4.3)之最后一式,得

$$(-1)^{n-1}x_1x_2\cdots x_{n-1}=\frac{b_0(\alpha_2-1)}{b_{n-1}(\alpha_1-1)}=\beta_0\frac{\alpha_2-1}{\alpha_1-1}.$$

再由(4.9),便得($x_1x_2\cdots x_{n-1}\neq0$ 及注意 $\theta_i=\alpha_{i+2}$)

$$\frac{1}{\alpha_1-1}=\frac{1}{\alpha_2-1}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\theta_i-1}=\frac{1}{\alpha_2-1}+\frac{1}{\alpha_3-1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{n+1}-1}.$$

参　考　文　献

[1] Л. С. Лягина, Интегральные кравые дифференциального уравнения $y'=\frac{a_0x^2+a_1xy+a_2y^2}{b_0x^2+b_1xy+b_2y^2}$. *УМН*, **6** (1951), вып. 2.

[2] 张栜，微分方程 $y'=\frac{a_0x^2+a_1xy+a_2y^2}{b_0x^2+b_1xy+b_2y^2}$ 的积分曲綫的拓扑結构．数学进展, **3** (1957), 234—235.

[3] Г. Е. Шилов, Интегральные кравые однородного дифференциального уравнения. *УМН*, **5** (1950), № 5.

[4] 傅种孙,循环排列問题,武汉大学理科季刊八卷一期，第 1—15 頁,(原文系用英文写成，后又轉載自然科学讲座数学之部, 1950 年).

TOPOLOGICAL STRUCTURE OF INTEGRAL CURVES OF THE DIFFERENTIAL EQUATION

$$y'=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_ny^n}$$

LEE SHEN-LING
(*Hu Nan University*)

ABSTRACT

Let $n_1, n_2, \cdots, n_m$ be m positive integers, g the *g.c.d.* of $n_1, \cdots, n_m$. δ the positive factor of g (including 1, g). $p_1, p_2, \cdots, p_\lambda$ the positive prime factors of g. $1<p_1<<p_2<\cdots<p_\lambda$. $\varphi(\delta)$ the Euler function of δ (for example $\varphi(5)=4$). R the set of real numbers, I the set $[0, 1, 2, \cdots]$, we difine firstly the following functions

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\begin{cases}0, \text{ when } x_1=0, x_2=0, \cdots, x_m=0, \text{ or any one of } x_1, \cdots, x_m \text{ in } R-I.\\ \dfrac{1}{n}\sum_\delta \dfrac{\left(\frac{n_1}{\delta}+\cdots+\frac{n_m}{\delta}\right)!}{\left(\frac{n_1}{\delta}\right)!\cdots\left(\frac{n_m}{\delta}\right)!}\varphi(\delta), \text{ when } x_1=n_1, \cdots, x_m=n_m, n=n_1+\cdots+n_m.\end{cases}$$

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_m)=\begin{cases}0, \text{ when } x_1=0, \cdots, x_m=0; \text{ or any one of } x_1, \cdots, x_m \text{ in } R-I.\\ 0, \text{ when } x_1=n_1, \cdots, x_m=n_m \text{ and there at least three of } n_i\equiv d \text{ (mod. } 2d) \text{ hold.}\\ \dfrac{\left\{\left[\frac{n_1}{2d}\right]+\cdots+\left[\frac{n_m}{2d}\right]\right\}!}{\left[\frac{n_1}{2d}\right]!\cdots\left[\frac{n_m}{2d}\right]!}, \text{ when } x_1=n_1, \cdots, x_m=n_m, \text{ other than the second case.}\end{cases}$$

and $\left[\frac{m}{2}\right]$ is the greatest positive integer less than or equal to $\frac{m}{2}$.

$$F(n_1, \cdots, n_m)=\sum_{p_1}h(p_1)-\sum_{p_1,p_2}h(p_1p_2)-\sum_{p_1,p_2,p_3}h(p_1p_2p_3)+\cdots,$$

where $$\sum_{p_1}h(p_1)=h(p_1)+h(p_2)+\cdots+h(p_\lambda),$$

$$\sum_{p_1,p_2}h(p_1p_2)=h(p_1p_2)+h(p_1p_3)+\cdots+h(p_{\lambda-1}p_\lambda).$$

etc.

$$\phi(m,p,\alpha)=\begin{cases}\sum_{\beta=0}^{e}f(\alpha,p-\alpha,\beta,m-p-\beta), \\ \quad \text{when } m-p=2e+1, \quad p<m. \\ \sum_{\beta=0}^{e-1}f(\alpha,p-\alpha,\beta,m-p-\beta)+\frac{1}{2}[f(\alpha,p-\alpha,e,e)+ \\ \quad +F(\alpha,p-\alpha,e,e)]. \\ \quad \text{when } m-p=2e,\ p<m. \\ \frac{1}{2}[f(\alpha,m-\alpha)+h(\alpha,m-\alpha)], \quad \text{when } p=m.\end{cases}$$

$$\psi(m,p)=\sum_{\alpha=0}^{p}\phi(m,p,\alpha).$$

If n is odd, we difine

$$P(m)=\sum_{k=\tau(m)}^{[\frac{m}{2}]}\psi(m,2k), \text{ when } m<n+1, \text{ and } P(n+1)=\psi(n+1,n+1)-1.$$

and

$$\tau(m)=\begin{cases}0, \text{ when } m\leqslant\frac{n+1}{2}, \\ \frac{2m-(n+1)}{2}, m>\frac{n+1}{2}.\end{cases}$$

If n is even, we difine

$$Q(m)=\sum_{k=e(m)}^{[\frac{m+1}{2}]}\psi(m,2k-1), \text{when } m<n+1; \text{ and } Q(n+1)=\psi(n+1,n+1)-1.$$

and

$$e(m)=\begin{cases}1, \quad \text{when} \quad m\leqslant\frac{n}{2}, \\ \frac{2m-n}{2}, \quad \text{when} \quad m>\frac{n}{2}.\end{cases}$$

Then we prove the following results:

(1) If n is odd, the topological structure of integral curves of

$$y'=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_ny^n}$$

is divided into

$$2+\sum_{m=1}^{n+1}P(m)$$

classes.

(2) If n is even, the topological structure of integral curves of

$$y'=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots+a_ny^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_ny^n}$$

is divided into

$$\sum_{m=1}^{n+1}Q(m)$$

classes.

第10卷 第1期　　数 学 学 报　　Vol. 10, No. 1
1960 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March. 1960

关于可三角剖分的紧致流形的模 2 示嵌类*

吴 振 德
(石家庄师范学院)

引 言

关于复合形或更一般的空間在欧氏空間中的实現問題，Whitney 和 Thom 分别有下面的結果:

定理. (Whitney)　n 維紧致微分流形 M^n 可微分实現于 R^N 中的必要条件为

$$\overline{W}^k(M^n) = 0, k \geqslant N - n. \tag{1}$$

定理. (Thom)　一个有可数基而局部可縮的紧致 Hausdorff 空間 X 可以拓扑实現于 R^N 中的必要条件为

$$S^k_m H^r(X; I_2) = 0, \quad 2k + r \geqslant N. \tag{2}$$

另外，关于此問題，吳文俊在 [4] 中对任意一个 Hausdorff 空間 X 引入了一組上同調不变量——示嵌类 $\Phi^k(X)$，并說明了示嵌类和拓扑实現的关系，即有

定理. 一个 Hausdorff 空間 X 可以拓扑实現于 R^N，則

$$\Phi^k(X) = 0,$$

并指出了示嵌类 $\Phi^k(X) = 0$ 与 Whitney 和 Thom 的結果之間的关系:

定理. 如果 M^n 是一个 n 維可三角剖分的紧致微分流形而 $\rho_2\Phi^N(M^n)$ (即 $\Phi^N(M^n)$ mod. 2) $= 0$，則

$$\overline{W}^k(M^n) = 0, k \geqslant N - n;$$

定理. 如果 M^n 是一个 n 維可三角剖分的紧致微分流形而 $\overline{W}^k(M^n) = 0, k \geqslant N - n$，則

$$S^k_m H^r(M^n; I_2) = 0, 2k + r \geqslant N.$$

因此，自然发生了下面二个問題[1]:

(i) 是否有(2)式成立但(1)式不成立的 n 維紧致微分流形存在;

(ii) 是否有(1)式成立但 $\rho_2\Phi^N(M^n) \neq 0$ 的 n 維紧致微分流形存在.

本文証明了

定理[2]. 設 M^n 是一个有三角剖分的 $n(>0)$ 維紧致流形. 那么 $\rho_2\Phi^N(M^n) = 0$ 的充要条件为

$$S^k_m H^r(M^n; I_2) = 0, 2k + r \geqslant N.$$

联合已知結果，即得

定理. 設 M^n 是一个有三角剖分的 $n(>0)$ 維紧致微分流形. 則下列三个事实是等

* 1958 年 9 月 9 日收到.

1) 这二个問題都是吳文俊先生在一次报告会上提出的.

2) 这定理的必要部分是吳文俊在 [4, 定理 4] 中已証明.

价的：

(i)　$\rho_2\Phi^N(M^n)=0$;

(ii)　$\overline{W}^k(M^n)=0,\ k\geqslant N-n$;

(iii)　$S^k_m H^r(M^n;I_2)=0,\ 2k+r\geqslant N$.

这也就回答了上面所提出的二个問題.

本文在 §1 中为了以后方便叙述了 Richardson-Smith 序列以及上下同調羣之間的配对. §2 中建立了示嵌类和流形对偶性質之間的关系. §3 的內容是利用 §2 中的結果以及吳[4, 定理 4]中的方法証明了前一段的断語. 最后一节是計算可三角剖分的 n 維紧致流形的 $(2n-1)$ 維示嵌类[1]：当 $n\neq 2^\alpha(\alpha\geqslant 0)$ 时，則有 $\Phi^{2n-1}(M^n)=0$；当 $n=2^\alpha(\alpha>0)$ 时，在可定向的假設下，則有 $\Phi^{2n-1}(M^n)=0$.

本文是在江泽涵和廖山涛两位教授的鼓励和帮助下完成的. 作者在此致以謝意.

§1. Richardson-Smith 序列

1. Richardson-Smith 序列[参看 1, 第一章 (1)].

設 $\tilde K$ 是一个有限复形以及 $t:|\tilde K|\to|\tilde K|$ 是一个具有周期为 2 的周期变换，滿足下面二个条件：

(i) t 是单純变换，

(ii) 如果一个单形被 t 变到自己，那么它的每一点在 t 下都是不动的.

設 $\tilde L$ 是 $\tilde K$ 中任意一个在 t 下不变的子复形，以及 F 是 $\tilde K$ 中所有不动单形所組成的子复形. 取 I_2（整数模 2）为系数羣. 命 $\rho=1+t$，我們有 [例如参看 2, §1，取空間为有限复形] 下面的 Richardson-Smith 序列

$$\left.\begin{array}{l}\cdots\to H^q(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to{}^\rho H^q(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\xrightarrow{\mu}{}^\rho H^{q+1}(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to\\ \qquad\qquad\to H^{q+1}(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to\cdots\\ [\cdots\to H_q(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to{}^\rho H_q(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\xrightarrow{\nu}{}^\rho H_{q-1}(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to\\ \qquad\qquad\to H_{q-1}(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to\cdots].\end{array}\right\}\quad(1.1)$$

設 $\tilde K'$ 也是一个有限复形，t' 是以 2 为周期的变换作用于 $\tilde K'$ 上. 又設 $\tilde L'$, F' 分別为 $\tilde K'$ 中的在 t' 下不变的子复形，及不动子复形. 考虑单純映射

$$f:(\tilde K,\tilde L)\to(\tilde K',\tilde L'),\ 滿足\ ft=t'f.$$

如同普通同調序列一样，有下面的交換图解：

$$\left.\begin{array}{l}\cdots\to H^q(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to{}^\rho H^q(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\xrightarrow{\mu}{}^\rho H^{q+1}(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to\\ \ \uparrow f^*\qquad\qquad\to H^{q+1}(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to\cdots\\ \cdots\to H^q(\tilde K',\tilde L'\cup F';I_2)\to{}^\rho H^q(\tilde K',\tilde L'\cup F';I_2)\xrightarrow{\mu}{}^\rho H^{q+1}(\tilde K',\tilde L'\cup F';I_2)\to\\ \qquad\qquad\to H^{q+1}(\tilde K',\tilde L'\cup F';I_2)\to\cdots\\ \left[\begin{array}{l}\cdots\to H_q(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to{}^\rho H_q(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\xrightarrow{\nu}{}^\rho H_{q-1}(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to\\ \ \downarrow f_*\qquad\qquad\to H_{q-1}(\tilde K,\tilde L\cup F;I_2)\to\cdots\\ \cdots\to H_q(\tilde K',\tilde L'\cup F';I_2)\to{}^\rho H_q(\tilde K',\tilde L'\cup F';I_2)\xrightarrow{\nu}{}^\rho H_{q-1}(\tilde K',\tilde L'\cup F';I_2)\to\\ \qquad\qquad\to H_{q-1}(\tilde K',\tilde L'\cup F';I_2)\to\cdots.\end{array}\right]\end{array}\right\}\quad(1.2)$$

1) 見上頁注脚 1.

由上述交換图解,可以得到

$$\left.\begin{array}{l}\mu^k f^* = f^* \mu^k \\ [\nu^k f_* = f_* \nu^k].\end{array}\right\} \quad (1.3)$$

2. ${}^pH^q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2)$ 和 ${}^pH_q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2)$ 的配对.

設 $\tilde{K}, \tilde{L}, F, t$ 如前. 从[2, 34 頁]得到 ${}^pH^q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2)$ 和 ${}^pH_q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2)$ 到 I_2 的配对. 这个配对是对偶配对[参看 3, 75 頁],具有下面性質[参看 2, 34 頁]:

$$\beta \cdot \nu(\alpha) = \mu(\beta) \cdot \alpha, \alpha \in {}^pH_q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2), \beta \in {}^pH^{q-1}(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2). \quad (1.4)$$

由是对于固定的一个上同調类 $\beta \in {}^pH^q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2)$ 决定一个同态

$$\langle \ , \beta\rangle: {}^pH_q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2) \to I_2$$

即

$$\langle \ , \beta\rangle \in \mathrm{Hom}\,({}^pH_q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2); I_2).$$

β 到 $\langle \ , \beta\rangle$ 这个对应决定了一个同态

$$\eta: {}^pH^q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2) \to \mathrm{Hom}({}^pH_q(\tilde{K}, \tilde{L} \cup F; I_2); I_2), \quad (1.5)$$

不难証明这同态 η 是在上的.

§2. 示嵌类与流形对偶之間的关係

1. 示嵌类

为了清楚起見,让我們回顧一下示嵌类的定义[4, 82 頁—83 頁]. 設 X 是任意 Hausdorff 空間. 記 $X \times X = \tilde{X}$, 命 $d: X \to \tilde{X}$ 为对角映射. 定义 $t: \tilde{X} \to \tilde{X}$ 为 $t(x, y) = (y, x)$. 記 $\tilde{X}^* = \tilde{X} - dX$, 則 t 是 $\tilde{X}^*$ 的一个周期为 2 的拓扑变换, 且无不动点. 記 $X^* = \tilde{X}^*/t$ 为法空間. 命 $S(\tilde{X}^*)$, $S(X^*)$ 为奇异复形. 依 P. A. Smith 对 $S(X^*)$ 可定义一組同态

$$\mu_k: H^q(S(X^*); I) \to H^{q+k}(S(X^*); I_{(k)}), \quad (2.1)$$

其中 I 为整数加羣, $I_{(k)} = \begin{cases} I, & k \text{ 为偶数;} \\ I_2, & k \text{ 为奇数.}\end{cases}$

設 1 为 $C^0(S(X^*))$ 中整数单位类. 定义 $\mu_k 1 \in H^k(S(X^*); I_{(k)})$ 为 X 的示嵌类, 以 $\Phi^k(X)$ 記之. 又以 ρ_2 表示模 2 約化或恆同 $I_2 \to I_2$ 所引起的同态,叫 $\rho_2\Phi^k(X)$ 为模 2 示嵌类.

以下取 I_2 为系数羣. 相应于(2.1)亦可得一組同态

$$\mu_k: H^q(S(X^*); I_2) \to H^{q+k}(S(X^*); I_2) \quad (2.2)$$

具有性質

$$\mu_k = (\mu_1)^k. \quad (2.3)$$

取 $1 \in C^0(S(X^*); I_2)$ 为单位类时,可得一組上同調类 $\mu_k 1 \in H^k(S(X^*); I_2)$. 不难看出它与 $\rho_2\Phi^k(X)$ 是相等的.

2. 示嵌类和流形对偶之間的关系

設 M 是一个有三角剖分的 n 維紧致流形. 定义 t, $|\tilde{M}|^*$, $|M|^*$ 等符号如前. 作 $|M| \times |M|$ 的一个三角剖分[例如 5, 66 頁—70 頁],記为 $M \times M$, 使 t 在上作用满足 §1 中的条件 (i) 和 (ii). $M \times M$ 的第一次重心重分后所得的复形, 以 $(M \times M)'$ 記之. 記 $(dM)'$ 为 dM 經过重心重分后所得的复形. 对任意一个 r 維单形 $T^r \in (M \times M - dM)$ 在

$(M \times M)'$ 中有一对偶胞腔 dT^r，維数为 $2n - r$. 容易看出 $dtT^r = tdT^r$，并且有

$$\partial dT^r = \Sigma_i [T_i^{r+1}: T^r]\, dT_i^{r+1}. \tag{2.4}$$

现在把 dT^r, $T^r \in (M \times M - dM)$看作一个胞腔,維数为 $2n - r$. 以 (2.4) 式定义边界运算. 如此得到一个胞腔复形 $\widetilde{C}$. 不难看出 t 在上作用沒有固定胞腔,周期为 2. 如同 § 1 中的(1.3)一样能引入一組同态 μ^k: ${}^\rho H^q(\widetilde{C}; I_2) \to {}^\rho H^{q+k}(\widetilde{C}; I_2)$. 利用 $T^r \in (M\times M-dM)$ 与 dT^r 之間的对应,即可得一同构对应

$$\widetilde{D}: \quad C_q(M \times M, dM; I_2) \approx C^{2n-q}(\widetilde{C}; I_2),$$

这同构具有性质 $\rho\widetilde{D} = \widetilde{D}\rho$ 及 $D\partial = \delta D$. 因此导出一同构

$$\widetilde{D}: \quad {}^\rho H_q(M \times M, dM; I_2) \approx {}^\rho H^{2n-q}(\widetilde{C}; I_2). \tag{2.5}$$

有下面交换图解成立:

$$\left.\begin{array}{ccc} {}^\rho H_q(M \times M, dM; I_2) & \xrightarrow{\nu^k} & {}^\rho H_{q-k}(M \times M, dM; I_2) \\ \wr\wr \widetilde{D} & & \wr\wr \widetilde{D} \\ {}^\rho H^{2n-q}(\widetilde{C}; I_2) & \xrightarrow{\mu^k} & {}^\rho H^{2n-q+k}(\widetilde{C}; I_2). \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

事实上,任給一个 $\alpha \in {}^\rho H_q(M\times M, dM; I_2)$, 取它的一个代表鏈 $\rho a, a \in C_q(M\times M, dM; I_2)$, 可使 a 中每一个取值不为零的单形都属于$(M \times M - dM)$. 根据 μ 和 ν 的定义则有

$$\mu\widetilde{D}(\rho a) = \mu(\rho\widetilde{D}a) = \delta\widetilde{D}a, \qquad \widetilde{D}\nu(\rho a) = \widetilde{D}\partial a.$$

由于 $\delta\widetilde{D} = \widetilde{D}\partial$, 就得到 $\mu\widetilde{D} = \widetilde{D}\nu$. 由此卽得(2.6)成立.

由在$(M \times M)'$ 中的所有子复形 dT^r, $T^r \in (M \times M - dM)$所构成的在 $(M \times M)'$ 內的閉子复形,以 $\widetilde{N}^*$ 記之. t 在 $\widetilde{N}^*$ 上作用满足 § 1, (1) 中的条件 (i) 和 (ii), 且沒有不动点. 設 $N^* = \widetilde{N}^*/t$ 是 $\widetilde{N}^*$ 在 t 下的法复形. 根据流形的对偶性, 可以把 ${}^\rho H^q(\widetilde{N}^*; I_2)$ 与 ${}^\rho H^q(\widetilde{C}; I_2)$ 恆同看待. 因此从(2.6)就有交换图解

$$\left.\begin{array}{ccc} {}^\rho H_q(M \times M, dM; I_2) & \xrightarrow{\nu^k} & {}^\rho H_{q-k}(M \times M, dM; I_2) \\ \wr\wr \widetilde{D} & & \wr\wr \widetilde{D} \\ {}^\rho H^{2n-q}(\widetilde{N}^*; I_2) & \xrightarrow{\mu^k} & {}^\rho H^{2n-q+k}(\widetilde{N}^*; I_2). \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

由于$|\widetilde{N}^*|$是$|\widetilde{M}|^*$的強收縮核 [参看 6, 32 頁],并且变形时与 t 是交換的,則得同构 i^*: $H^q(|M|^*; I_2) \approx H^q(|N^*|; I_2)$, 这里的 i 是由包含映射 $\tilde{i}: |\widetilde{N}^*| \to |\widetilde{M}|^*$ 所导出的, 并且有交換图形:

$$\left.\begin{array}{ccc} H^q(S(|M^*|); I_2) & \xrightarrow{\mu^k} & H^{q+k}(S(|M^*|); I_2) \\ \wr\wr i^* & & \wr\wr i^* \\ H^q(|N^*|; I_2) & \xrightarrow{\mu^k} & H^{q+k}(|N^*|; I_2). \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

由于$|\widetilde{N}^*|$是一个有限复形,不难得到:按照 § 1 的 Richardson-Smith 序列中的同态 μ, 以及本节的(2.2)分别有下面二組同态

$$\mu^k: {}^\rho H^q(\widetilde{N}^*; I_2) \to {}^\rho H^{q+k}(\widetilde{N}^*; I_2), \quad (\mu_1)^k: H^q(N^*; I_2) \to H^q(N^*; I_2)^{1)}.$$

---

1) 由于 N^* 是有限复形,我們把 $H^q(N^*; I_2)$ 和 $H^q(S(|N^*|); I_2)$恆同看待.

利用对应 $\rho\tilde{\sigma}\to\sigma$，其中 $\pi(\tilde{\sigma})=\sigma$ (π: $\tilde{N}^*\to N^*$ 为自然投影)，自然地引出一个同构 θ: ${}^{\rho}H^q(\tilde{N}^*;I_2)\approx H^q(N^*;I_2)$，并且有下面交换图解：

$$\left.\begin{array}{ccc} {}^{\rho}H^q(\tilde{N}^*;I_2) & \xrightarrow{\mu^k} & {}^{\rho}H^{q+k}(\tilde{N}^*;I_2) \\ \Big\Vert\theta & & \Big\Vert\theta \\ H^q(N^*;I_2) & \xrightarrow{(\mu_1)^k} & H^{q+k}(N^*;I_2) \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

定义 $D=(i^*)^{-1}\theta\tilde{D}$，并联合(2.7)，(2.9)，(2.8)就得交换图解：

$$\left.\begin{array}{ccc} {}^{\rho}H_q(M\times M,dM;I_2) & \xrightarrow{\nu^k} & {}^{\rho}H_{q-k}(M\times M,dM;I_2) \\ \Big\Vert D & & \Big\Vert D \\ H_{2n-q}(S(|M^*|);I_2) & \xrightarrow{(\mu_1)^k} & H_{2n-q+k}(S(|M^*|);I_2). \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

特别地有

$$D\nu^kZ=\rho_2\Phi^k(M), \tag{2.11}$$

这里 Z 是 ${}^{\rho}H_{2n}(M\times M,dM;I_2)\approx I_2$ 的生成元.

§3. $\rho_2\Phi^k(M)=0$ 的充要条件

本节中如不作任何声明时，所出现的 M 都假定是一个有三角剖分的 $n(>0)$ 維紧致流形.

根据(2.11)立刻有

引理 1. $\rho_2\Phi^k(M)\neq 0$ 的充要条件是 $\nu^kZ\neq 0$，Z 为 ${}^{\rho}H_{2n}(M\times M,dM;I_2)\approx I_2$ 的生成元.

引理 2. $\nu^kZ\neq 0$ 的充要条件是 $\mu^k\,{}^{\rho}H^{2n-k}(M\times M,dM;I_2)\neq 0$.

証. 必要性：由于(1.5)中 η 是在上的，必定存在一个 $U\in{}^{\rho}H^{2n-k}(M\times M,dM;I_2)$ 使 $U\cdot\nu^kZ\neq 0$. 从(1.4)就有

$$\mu^kU\cdot Z=U\cdot\nu^kZ\neq 0.$$

这就証明了 $\mu^k\,{}^{\rho}H^{2n-k}(M\times M,dM;I_2)\neq 0$.

充分性：設存在一个 $U\in{}^{\rho}H^{2n-k}(M\times M,dM;I_2)$ 使 $\mu^kU\neq 0$. 首先知道 ${}^{\rho}H^{2n}(M\times\times M,dM;I_2)\approx I_2$. 这是因为先从正合序列

$$\cdots\to{}^{\rho}H^{2n}(M\times M,dM;I_2)\to H^{2n}(M\times M,dM;I_2)\xrightarrow{i_\rho}{}^{\rho}H^{2n}(M\times M,dM;I_2)\to$$
$$\to{}^{\rho}H^{2n+1}(M\times M,dM;I_2)=0$$

中得到 i_ρ 是在上的. 又因 $d(x\otimes 1)=x\smile 1=x$, $x\in H^q(dM;I_2)$，故有正合序列

$$0\to H^q(M\times M,dM;I_2)\to H^q(M\times M;I_2)\to H^q(dM;I_2)\to 0.$$

由此卽得 $H^{2n}(M\times M,dM;I_2)\approx H^{2n}(M\times M;I_2)\approx I_2$. 若 ${}^{\rho}H^{2n}(M\times M,dM;I_2)=0$，则由 Richardson-Smith 正合序列卽得 $H^{2n}(M\times M,dM;I_2)=0$. 这与 $H^{2n}(M\times M,dM;I_2)\approx I_2$ 相矛盾. 如此就得到了 ${}^{\rho}H^{2n}(M\times M,dM;I_2)\approx I_2$.

由(1.5)及上述事实知 η: ${}^{\rho}H^{2n}(M\times M,dM;I_2)\approx\mathrm{Hom}({}^{\rho}H_{2n}(M\times M,dM;I_2);I_2)$. 因此，$\mu^kU\cdot Z\neq 0$，这卽証得 $\nu^kZ\neq 0$.

引理 3.　当 $k \leqslant n$ 时一定有 $\rho_2\Phi^k(M) \neq 0$.

証.　根据 Thom [7, 定理 4] 或 Bott [8, 引理 1] 有

$$\mu^{n-1}\delta\colon H^n(dM; I_2) \to \mu^\rho H^{2n-1}(M \times M, dM; I_2)$$

是同构在内的,这里 δ 是上边界运算 $H^n(dM;I_2) \to \mu^\rho H^n(M \times M, dM; I_2)$[1] $\subset {}^\rho H^{n+1}(M \times M, dM; I_2)$. 这亦就有

$$\mu^{n-1}\delta\colon H^n(dM; I_2) \to \mu^n\, {}^\rho H^n(M \times M, dM; I_2) \subset \mu^\rho H^{2n-1}(M \times M, dM; I_2).$$

由此得到 $\mu^n\, {}^\rho H^n(M \times M, dM; I_2) \neq 0$. 这就証明了引理 4.

引理 4.　若 $S_m^k H^r(M; I_2) = 0$, 当 $2k + r \geqslant m$ 时 [定义見 9, 235 頁—237 頁], 则有 $\rho_2\Phi^m(M) = 0$ (自然这里有 $m > n$).

証.　由于 $S_m^0 H^n(M; I_2) = H^n(M; I_2) \approx I_2$, 即知 m 必須大于 n.

为了証明 $\rho_2\Phi^m(M) = 0$, 只須証明 $\mu^{m\rho}H^{2n-m}(M \times M, dM; I_2) = 0$ 就行了 (注意 $m > n$). 根据 Thom [7, 定理 5] 的結果,有直接和分解

$$\mu^\rho H^{2n-m}(M \times M, dM; I_2) = \sum_{r=[(2n-m)/2]+1}^{2n-m} \oplus \ \mu^{2n-m-r}\delta H^r(dM; I_2),$$

两边用 μ^{m-1} 作用卽得下式(一般不見得是直接和分解):

$$\mu^m\, {}^\rho H^{2n-m}(M \times M, dM; I_2) = \sum_{r=[(2n-m)/2]}^{2n-m} \mu^{2n-1-r}\delta H^r(dM; I_2).$$

現只須証明每一項 $\mu^{2n-1-r}\delta H^r(dM; I_2) = 0$, $r = [(2n-m)/2] + 1, \cdots, 2n-m$.

以下証明所用的方法見 [4, 87 頁—88 頁]. 設任意一个 $U \in H^r(dM; I_2)$, $r = [(2n-m)/2] + 1, \cdots, 2n-m$. 下面討論时任意固定其中一个 r 来証明 $\mu^{2n-r-1}U = 0$. 由 [7 或 8, 定理 1] 有

$$\sum_{j=0}^{r} \mu^{r-j}\delta S_q^j U = 0. \tag{3.1}$$

命 $S_m^i\colon H^r(dM; I_2) \to H^{r+i}(dM; I_2)$ [見 9]. 对于 $S_m^i U \in H^{r+i}(dM; I_2)$, 同样有

$$\sum_{j=0}^{r+i} \mu^{r+i-j}\delta S_q^j S_m^i U = 0. \tag{3.2$_i$}$$

根据 [9, 定理 2], 有下式成立:

$$\sum_{i_1+i_2=i} S_q^{i_1} S_m^{i_2} = \begin{cases} 0, & i > 0; \\ 1, & i = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 1 代表模 2 单位类.

設正整数 k, r (r 为已固定的数), 满足 $2n - r + 1 \geqslant 2k + r \geqslant 2n - r \geqslant r + 1$ (由于 m 必須大于 n, 又有 $r \leqslant 2n - m$, 则有 $2n - r \geqslant m \geqslant r + 2$. 因此正整数 k 必然存在). 以 $\mu^{2n-2r-2i-1}$ 作用于 $(3.2)_i$, $i = 0, 1, \cdots, k-1$, 将所得各項相加,并注意 $\mu^r \cdot \mu^s =$

---

1) 这是从交换图解

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & {}^\rho H^q(M \times M, dM; I_2) & \xrightarrow{\mu} & {}^\rho H^{q+1}(M \times M, dM; I_2) & & \\
H^q(M\times M, dM; I_2) & \nearrow\searrow & \uparrow & & \uparrow \delta & \searrow\nearrow & H^{q+1}(M\times M, dM; I_2) \\
 & & H^q(M \times M; I_2) & \xrightarrow{d} & H^q(dM; I_2) & &
\end{array}$$

以及 $0 \longrightarrow H^q(M\times M, dM; I_2) \longrightarrow H^q(M\times M; I_2) \longrightarrow H^q(dM; I_2) \longrightarrow 0$ 的正合性而得到的.

$=\mu^{r+s}$，即得

$$\sum_{s=0}^{r+2k-2} \mu^{2n-r-s-1}\delta \sum_{i=0}^{k-1} S_q^{s-i} S_m^i U = 0,$$

变更上式得

$$\mu^{2n-r-1}\delta \sum_{i=0}^{k-1} S_q^{-i} S_m^i U = \sum_{s=1}^{r+2k-2} \mu^{2n-r-s-1}\delta \sum_{i=0}^{k-1} S_q^{s-i} S_m^i U =$$

$$= \sum_{s=1}^{r+2k-2} \mu^{2n-r-s-1}\delta \left(\sum_{i=0}^{s} S_q^{s-i} S_m^i U - \sum_{i=k}^{s} S_q^{s-i} S_m^i U \right).$$

从(3.3)式即有

$$\mu^{2n-r-1}\,\delta U = \sum_{s=k}^{r+2k-2} \mu^{2n-r-s-1}\delta \sum_{i=k}^{s} S_q^{s-i} S_m^i U. \tag{3.4}$$

根据假設 $S_m^k H^r(M;\ I_2) = 0, 2k + r \geqslant m$. 我們就有

$$S_m^s U = 0, \quad s = k, \cdots, r + 2k - 2. \tag{3.5}$$

因 $2k + r \geqslant 2n - r \geqslant m$ 成立. 从 (3.5) 式推出 $\mu^{2n-r-1}\,\delta U = 0$. 这就完成引理 5 的証明.

定理 1. 設M是一个有三角剖分的 $n(>0)$ 維的紧致流形. 那末 $\rho_2\Phi^m(M) = 0$ 的充要条件是

$$S_m^k H^r(M;\ I_2) = 0,\ 当\ 2k + r \geqslant m.$$

証. 这由 [4, 定理 4] 及引理 5 給出.

定理 2. 設M是一个有三角剖分的 $n(>0)$ 維紧致微分流形. 則下面三个条件是等价的:

(i) $\rho_2\Phi^m(M) = 0$;

(ii) $\overline{W}^k(M) = 0,\ k \geqslant m - n$ [参看 4, 79 頁];

(iii) $S_m^k H^r(M;\ I_2) = 0$, 当 $2k + r \geqslant m$.

証. 由 (i) 推 (ii) 見 [4, 92 頁推論 1]. 从 (ii) 推 (iii) 見 [4, 定理 6 及定理 5]. 从 (iii) 推 (i) 見本节引理4.

§4. $\Phi^{2n-1}(M)=0$ 的計算

引理 5. 設 X 是一个有限复形. 則有 $S_q^j S_q^{2^{\alpha-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X;\ I_2) = 0,\ 0 < j <$ $< 2^{\alpha}(\alpha > 0)$.

証. 当 $\alpha = 1$ 时, 根据 H. Cartan 所証明的公式 [参看 10, 第 15 講 10 頁], 有

$$S_q^1 S_q^1 H^1(X;\ I_2) = S_q(H^1(X;\ I_2) \smile H^1(X;\ I_2)) =$$

$$= S_q^1 H^1(X;\ I_2) \smile H^1(X;\ I_2) + H^1(X;\ I_2) \smile S_q^1 H^1(X; I_2) = 0.$$

归納地假定 $S_q^j S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2) = 0, 0 < j < 2^k\ (k > 0)$. 現証 $S_q^j S_q^{2^k} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1 \times$ $\times (X;\ I_2) = 0,\ 0 < j < 2^{k+1}$. 根据 H. Cartan 的公式, 有

$$S_q^j [S_q^{2^k} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X;\ I_2)] = S_q^j [S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X;\ I_2) \smile S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X;\ I_2)] =$$

$$= \sum_{i=0}^{j} [(S_q^{j-i} S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X;\ I_2)) \smile (S_q^i S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X;\ I_2))] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } i \text{ 为奇数时,} \\ (S_q^{\frac{i}{2}} S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)) \smile (S_q^{\frac{i}{2}} S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)), & \text{当 } i \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

由于 $0 < \frac{i}{2} < 2^k$，根据归納假定，有 $S_q^{\frac{i}{2}} S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2) = 0$. 这就完成了引理 5 的証明.

引理 6. 設 X 是一个 n 維有限复形. 則有 $S_m^{n-1} H^1(X; I_2) = S_q^{n-2^{\alpha-1}} S_q^{2^{\alpha-2}} \cdots \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)$, $2^{\alpha-1} < n \leqslant 2^\alpha (\alpha > 1)$.

証. 根据[9]，有

$$\sum_{i=0}^{n-1} S_m^{n-1-i} S_q^i H^1(X; I_2) = S_m^{n-1} S_q^0 H^1(X; I_2) + S_m^{n-2} S_q^1 H^1(X; I_2) = 0,$$

即得 $S_m^{n-1} H^1(X; I_2) = S_m^{n-2} S_q^1 H^1(X; I_2)$. 先欲証明 $S_m^{n-1} H^1(X; I_2) = S_m^{n-2^{\alpha-1}} S_q^{2^{\alpha-2}} \cdots \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)$.

归納地假定 $S_m^{n-1} H^1(X; I_2) = S_m^{n-2^{k-1}} S_q^{2^{k-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)$, $(\alpha > k)$ 成立. 由[9]得

$$\sum_{i=0}^{n-2^{k-1}} S_m^{n-2^{k-1}-i} S_q^i (S_q^{2^{k-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)) = \sum_{i=0}^{2^{k-1}} S_m^{n-2^{k-1}-i} S_q^i (S_q^{2^{k-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)) = 0.$$

根据引理 5，有

$$\sum_{i=0}^{2^{k-1}} S_m^{n-2^{k-1}-i} S_q^i (S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)) =$$

$$= S_m^{n-2^{k-1}} S_q^0 S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2) + \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} S_m^{n-2^{k-1}-i} S_q^i (S_q^{2^{k-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)) + S_m^{n-2^k} S_q^{2^{k-1}} S_q^{2^{k-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)$$

$$= S_m^{n-2^{k-1}} S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2) + S_m^{n-2^k} S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2) = 0.$$

从归納法假定，即得 $S_m^{n-1} H^1(X; I_2) = S_m^{n-2^{k-1}} S_q^{2^{k-1}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)$. 这就証明了 $S_m^{n-1} H^1(X; I_2) = S_m^{n-2^{\alpha-1}} S_q^{2^{\alpha-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)$.

我們考慮

$$\sum_{i=0}^{n-2^{\alpha-1}} S_m^{n-2^{\alpha-1}-i} S_q^i (S_q^{2^{\alpha-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)) =$$

$$= S_m^{n-2^{\alpha-1}} S_q^0 S_q^{2^{\alpha-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2) + \sum_{i=1}^{n-2^{\alpha-1}-1} S_m^{n-2^{\alpha-1}-i} S_q^i (S_q^{2^{\alpha-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2)) + S_m^0 S_q^{n-2^{\alpha-1}} S_q^{2^{\alpha-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2) =$$

$$= S_m^{n-2^{\alpha-1}} S_q^{2^{\alpha-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2) + S_q^{n-2^{\alpha-1}} S_q^{2^{\alpha-2}} \cdots S_q^2 S_q^1 H^1(X; I_2) = 0.$$

这就証得 $S_m^{n-1}H^1(X;I_2)=S_m^{n-2^{\alpha-1}}S_q^{2^{\alpha-2}}\cdots S_q^2S_q^1H^1(X;I_2)=S_q^{n-2^{\alpha-1}}S_q^{2^{\alpha-2}}\cdots S_q^2S_q^1H^1(X;I_2)$.

定理 3. 設 M 是一个有三角剖分的 n 維紧致流形，$2^{\alpha-1}<n<2^\alpha$，$\alpha>1$. 則有 $\Phi^{2n-1}(M)=\rho_2\Phi^{2n-1}(M)=0$.

証. 欲証 $\rho_2\Phi^{2n-1}(M)=\Phi^{2n-1}(M)=0$，只須証明 $S_m^kH^r(M;I_2)=0$，$2k+r\geqslant 2n-1$，亦即只須証明 $S_m^{n-1}H^1(M;I_2)=0$ 就行了 ($S_m^nH^0(M;I_2)=0$ 自然成立 [見 9]). 根据引理 6 及引理 5 有

$$S_m^{n-1}H^1(M;I_2)=S_q^{n-2^{\alpha-1}}S_q^{2^{\alpha-2}}\cdots S_q^2S_q^1H^1(M;I_2)=0.$$

定理 3 的証明完成.

定理 4. 設 M 是一个有三角剖分的 n 維紧致可定向流形，$n=2^\alpha$，$\alpha>0$. 則有 $\Phi^{2n-1}(M)=\rho_2\Phi^{2n-1}(M)=0$.

証. 只須証明 $S_m^{n-1}H^1(M;I_2)=S_q^{2^{\alpha-1}}S_q^{2^{\alpha-2}}\cdots S_q^2S_q^1H^1(M;I_2)=0$. 設 x 是 $u\in H^1(M;I_2)$ 的一个代表上閉鏈. 取 $\alpha\in C^1(M;I)$ 使 $\alpha\equiv x\pmod{2}$，即有 $\delta\alpha=2y$，$y\in C^2(M;I)$. 根据[11]，有

$$\delta(\alpha\smile_1\alpha)=-\alpha\smile\alpha-\alpha\smile\alpha+\delta\alpha\smile_1\alpha-\alpha\smile_1\delta\alpha=-2\alpha\smile\alpha+2y\smile_1\alpha-2\alpha\smile_1 y,$$

及

$$\delta(\delta\alpha\smile_2\alpha)=-\delta\alpha\smile_1\alpha-\alpha\smile_1\delta\alpha+\delta\alpha\smile_2\delta\alpha=-2y\smile_1\alpha-2\alpha\smile_1 y+4y\smile_2 y.$$

由上两式即得

$$\delta[(\alpha\smile_1\alpha)+(\delta\alpha\smile_2\alpha)]=-2\alpha\smile\alpha-4\alpha\smile_1 y+4y\smile_2 y.$$

命 $\alpha\smile_1\alpha+\delta\alpha\smile_2\alpha=-h$. 上式就变为

$$\delta h=2\alpha\smile\alpha+4\alpha\smile_2 y-4y\smile_2 y.$$

根据上边界公式，有

$$\delta(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha-2}\smile h)=\delta(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha-2})\smile h+(\alpha\smile\cdots\smile\alpha)\smile\delta h$$

$$=\delta[(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^{\alpha-1}-1})\smile(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^{\alpha-1}-1}]\smile h+(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha-2})\smile(2\alpha\smile\alpha+4\alpha\smile_1 y-4y\smile_2 y)$$

$$=[\delta(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^{\alpha-1}-1})\smile(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^{\alpha-1}-1})-(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^{\alpha-1}-1})\smile\delta(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^{\alpha-1}-1})]\smile h$$

$$+2\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha}+4(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha-2})\smile(\alpha\smile_1 y)-4(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha-2})(y\smile_2 y).$$

由于所設 M 是可定向的，因此有

$$\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha}+2(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha-2})\smile(\alpha\smile_1 y)-2(\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha-2})\smile(y\smile_2 y)\ \tilde{\delta}\ 0.$$

即有

$$\overbrace{\alpha\smile\cdots\smile\alpha}^{2^\alpha}=\overbrace{x\smile\cdots\smile x}^{2^\alpha}=0\pmod{2}.$$

而 $S_q^{2^{\alpha-1}}S_q^{2^{\alpha-2}}\cdots S_q^2S_q^1x=\overbrace{x\smile\cdots\smile x}^{2^\alpha}$. 这就証明了 $S_m^{n-1}H^1(M;I_2)=0$. 亦即定理 4 成

立.

附註 1. 当 $n = 1$ 时，明显地有 $S_m^0 H^1(M; I_2) = H^1(M; I_2) \neq 0$. 因此 $\Phi^1(M) \neq 0$.

附註 2. 当 $n = 2^\alpha$, $\alpha > 0$ 时，吳文俊在 [4] 中已算得 $n = 2^\alpha$, $\alpha > 0$ 維投影空間 ρ^n 具有 $\rho_2 \Phi^{2n-1}(\rho^n) = \Phi^{2n-1}(\rho^n) \neq 0$. 这說明定理 4 中可定向性不能去掉.

参　考　文　献

[1] Nakaoka, M., Cohomology theory of a complex with transformation of prime period and ito application. *Journal of the Institute of Polytechnics*, Osaka City University vol. 7, No. 1—2, Series A.

[2] 廖山涛：周期变换与不动点定理：I. 上积与特异同調. 北京大学(自然科学)学报 **3** (1957), 1—37.

[3] Liao, S. D., A theorem on periodic transformations of homology spheres. *Ann. of Math.*, **56** (1952), 68—83.

[4] 吳文俊，复合形在欧氏空間中的实現問題 II. 数学学报，**7** (1957), 79—98.

[5] Eilenberg, S. and Steenrod, N., *Foundations of algebra topology*. Princeton University Press, 1952 (Princeton Mathematical Series, No. 15).

[6] Fox, R. H. Spencer, D. C. and Tucher, A. W., *Algebraic geometry and topology*, 1957 (Princeton Mathematical Series, No. 12).

[7] Thom, R., *Une théorie intrinsèque de puissance de Steenrod*. Colloque de Topologie de Strasbourg, 1951.

[8] Bott, R., On symmetric products and Steenrod squares, *Ann. of Math.*, **57** (1953), 579—590.

[9] 吳文俊：Smith 运算 与 Steenrod 运算的关系. 数学学报，**7** (1957), 235—241.

[10] Carton, H., *Séninaue Henri Carton*, 1949/1950, XV, 第 10 頁.

[11] Steenrod, N., Products of cocycles and extensions of mapping, *Ann. of Math.*, **48** (1947).

ON THE MODULO 2 IMBEDDING CLASS OF TRIANGULABLE COMPACT MANIFOLDS

WU CHENG-DER

(*Shih-Chia-Chuang Normal College*)

ABSTRACT

For the realization problem of complexes or more general spaces in euclidean spaces, Whitney & Thom have obtained the following results:

Theorem. (Whitney) The necessary conditions for an n-dimensional compact differentiable manifold M^n to be differentiably realizable in R^N are

$$\overline{W}^k(M^n) = 0, \qquad k \geqslant N - n. \tag{1}$$

Theorem. (Thom) The necessary conditions for a locally contractible compact Hausdorff space X with a countable basis to be topologically realizable in R^N are

$$S_m^k H^r(X; I_2) = 0, \qquad 2k + r \geqslant N. \tag{2}$$

Besides, in the case of Hausdorff space, Wu Wen-tsün[4] has introduced a system of cohomology invariants——imbedding classes $\Phi^k(X)$, and proved the following

Theorem. If a Hausdorff space X is topologically realizable in R^N, then

$$\Phi^k(X) = 0.$$

He has also proved:

Theorem. If M^n is an n-dimensional triangulable compact differentiable manifold and $\rho_2\Phi^N(M^n) = 0$ [i. e. $\Phi^N(M^n) \equiv 0$ (mod. 2)], then

$$\overline{W}^k(M^n) = 0, k \geqslant N - n.$$

Theorem. If M^n is an n-dimensional triangulable compact differentiable manifold, and $\overline{W}^k(M^n) = 0$, $k \geqslant N - n$. Then

$$S_m^k H^r(M^n; I_2) = 0, \quad 2k + r \geqslant N.$$

Hence, it is natural to us to ask:

I. Is there any n-dimensional compact differentiable manifold which satisfies (2) but not (1)?

II. Is there any n-dimensional compact differentiable manifold M^n which satisfies (1) but $\rho_2\Phi^N(M^n) \neq 0$?

In this paper I prove

Theorem[1)]. Let M^n be an n-dimensional $(n > 0)$ triangulable compact manifold. then $\rho_2\Phi^N(M^n) = 0$ when and only when

$$S_m^k H^r(M^n; I_2) = 0, \quad 2k + r \geqslant N.$$

Hence we obtain

Theorem. Let M^n be an n-dimensional $(n > 0)$ triangulable compact differentiable manifold. Then the following conditions are equivalent:

(i) $\rho_2\Phi^N(M^n) = 0$;

(ii) $\overline{W}^k(M^n) = 0, \quad k \geqslant N - n$;

(iii) $S^k mH^r(M^n; I_2) = 0, \quad 2k + r \geqslant N$.

According to this theorem, we know that no manifold exists as in I or II discribed.

I obtain the relations between imbedding classes and duality for manifold. According to this, and the method given by Wu [4, Theorem 4], I give a proof of the above theorem.

From this theorem, I obtain the following

Theorem. Let M^n be an n-dimensional triangulable compact manifold. Then

(i) $\Phi^{2n-1}(M^n) = 0$, when $n \neq 2^\alpha$ $(\alpha \geqslant 0)$;

(ii) $\Phi^{2n-1}(M^n) = 0$, when $n = 2^\alpha (\alpha > 0)$, and M^n is orientable.

1) The necessity has been proved by Wu [4, Theorem 4].

第10卷 第1期 数 学 学 报 Vol. 10, No. 1
1960 年 3 月 ACTA MATHEMATICA SINICA March, 1960

直交多項式級数的求和*

陈 建 功
(复 旦 大 学)

1. 設 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\cdots$ 是区間(a, b)上之一系列的就范直交函数，孟孝夫[1] 證明：当級数 $\sum(a_n \log\log n)^2$ 收斂时，直交函数級数

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) + \cdots \tag{1}$$

在 $\{\varphi_n(x)\}$ 的直交区間中，几乎到处可用正阶蔡查罗(Cesàro)求和法——(C, α)求和法，$\alpha > 0$——求和．当 $\alpha = 1$时，这个定理还有波尔根(Borgen)[2]和卡契馬尔兹(Karczmarz)[3]的証明；此时$(C, 1)$求和定理等价于(見[4])孟孝夫[1] 和拉特馬吼 (Rademacher)[5] 的收斂定理：級数 $\sum(a_n \log n)^2$ 的收斂含有 (1) 的几乎到处收斂．孟孝夫求和定理中的因子 $(\log\log n)^2$ 是最好的因子：事实上，孟孝夫[1]証明：对于适合 $w(n) = o(\log\log n)^2$ 的任一增加函数 $w(n)$，必有直交函数級数(1)几乎到处不可以用阿培耳 (Abel) 求和法求和——当然不能用 (C, α) 法求和——但是級数 $\sum a_n^2 w(n)$ 是收斂的．

今設 $\tau(x)$ 是在 (a, b) 上的正值而且可以积分的函数，它决定着如下的 n 次多項式 $P_n(x)(n = 0, 1, \cdots)$：

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)\tau(x)dx = \begin{cases}1 & (n = m)\\ 0 & (m \neq n).\end{cases}$$

本篇目的是在研究直交多項式級数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad c_n = \int_a^b f(x)P_n(x)\tau(x)\,dx \tag{2}$$

的求和問題，最后也議論到三角級数的求和問題．

2. 那湯松 (Натансон)[6] 證明：当 $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$时，級数(2)几乎处处收斂．这个結果，我們把它扩充成如下的形式：

定理 1. 假如 $f(x)$ 的連續性模 $\omega(f; t)$ 能使积分

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \omega^2(f; t)\log\frac{1}{t}\,\frac{dt}{t}$$

收斂，那末級数 (2) 在 $\{P_n(x)\}$ 的直交性区間中，几乎到处收斂．

关于(2)的 (C, α) 求和我們建立下面的

定理 2. 假如 $f(x)$ 的連續性模 $\omega(f; t)$ 能使积分

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \omega^2(f;t)\frac{\left(\log\log\frac{1}{t}\right)^2}{\log\frac{1}{t}}\,\frac{dt}{t}$$

* 1958 年12 月24 日收到．

收斂,那末級数(2)在它的直交性区間中,几乎处处可用正阶蔡查罗求和法求和;就是說:当 $\alpha > 0$ 时,几乎处处成立着

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (C, \alpha).$$

証明的要点,是在 $\sum c_n P_n(x)$ 几乎处处用 (C,α)——在定理1, $\alpha = 0$——可求和时,和必須是 $f(x)$. 首先建立

引理 1. 設 $h(t)$ 是一正值函数,当 $t \to +\infty$ 时 $h(t)$ 单調趋近于0,当 $t \geqslant t_0$ 时,成立着

$$(th(t))' \log t \leqslant 2h(t), \ (th(t)\log t)' > 0. \tag{3}$$

那末必有如下的 M,当 $N > M$ 时,

$$\sum_{n=M}^{N} c_n^2 n \log n \, h(n) \leqslant 6 \sum_{m=M_0}^{N} h(m) [E_{m-1}(f)_{L_2}]_0^2,$$

这里 $M_0 < M$,

$$E_n(f)_{L_p} = E_n(f; p_n)_{L_p} = \min_{p_n(x)} \left[\int_0^b |f(x) - p_n(x)|^p \tau(x) dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

$p_n(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$.

証. 設 $Mh(M)\log M \geqslant 2t_0 h(t_0) \log t_0$, 則从(3)和等式

$$\int_{t_0}^{t} h(t) dt + \int_{t_0}^{t} \log t \cdot \frac{d}{dt}(th(t)) dt = \Big[th(t)\log t\Big]_{t_0}^{t}$$

知道:当 $t > M$ 时,成立着

$$th(t)\log t < 6 \int_{t_0}^{t} h(t) dt.$$

由是, $N > M$ 的話,

$$\sum_{n=M}^{N} c_n^2 n \log n \cdot h(n) \leqslant 6 \sum_{n=M}^{N} c_n^2 \int_{t_0}^{n} h(t) dt \leqslant 6 \sum_{n=M_0}^{N} c_n^2 \int_{M_0}^{n} h(t) dt \quad (M_0 = [t_0] - 1).$$

最后的和小于或等于

$$\sum_{n=M_0}^{N} c_n^2 \sum_{m=M_0}^{n} h(m) = \sum_{m=M_0}^{N} h(m) \sum_{n=m}^{N} c_n^2.$$

因此得到

$$\sum_{n=M}^{N} c_n^2 n \log n \cdot h(n) \leqslant 6 \sum_{m=M_0}^{N} h(m) \sum_{n=m}^{N} c_n^2. \tag{4}$$

由最小平方的原理:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b |f(x) - c_0 P_0(x) - \cdots - c_m P_m(x)|^2 \tau(x) dx = \{E_m(f)_{L_2}\}^2,$$

将此結果代入(4),就証明了引理1.

設 $h(t) = \log t / t$, 則 $(th(t))' \log t = h(t)$, $th(t)\log t = (\log t)^2$. 由是从(4)得到

$$\sum_{n=4}^{N} c_n^2 (\log n)^2 \leqslant 6 \sum_{n=2}^{N} \frac{\log n}{n} [E_{n-1}(f)_{L_2}]^2.$$

应用杰克生（Jackson）的定理从上式得到

$$\sum_{n=1}^{N} c_n^2(\log n)^2 \leqslant C \sum_{n=2}^{N} \frac{\log n}{n}\left[\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)\right]^2. \tag{5}$$

因此，我們得着不等式 $\sum c_n^2(\log n)^2 \leqslant C\int_1^\infty \frac{\log t}{t}\omega^2(f;t)\,dt$. 由孟孝夫和拉特馬叹的定理，級数(2)几乎处处收斂. 定理1 証毕.

函数 $h(t) = (\log\log t)^2(t\log t)^{-1}$ 当 $t > 80$ 时，是单調減少的，乘积 $(th(t))'\log t$ 的絕对值小于 $h(t)$. 由是可知(4)对于这个 $h(t)$ 也能成立. 与上同样議論，我們得到不等式

$$\sum_{n=M}^{\infty} c_n^2(\log\log n)^2 \leqslant C\int_M^\infty \frac{(\log\log t)^2}{t\log t}\omega^2\left(f;\frac{1}{t}\right)dt.$$

利用孟孝夫的 (C, α) 求和定理，上式証明了定理 2.

3. 設 $p \geqslant 1$，当 $f(x) \in L_p(a, b)$ 时，我們写着

$$\omega_k(f;t)_{L_p} = \sup_{|h|\leqslant t}\left\{\int_a^b \left|\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}f(x+\nu h)\right|^p \tau(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

那末 $\omega_1(f;t)_{L_\infty}$ 就是 $\omega(f;t)$.

假如 $f(\theta+2\pi) \equiv f(\theta)$，那末我們也写着

$$\omega_k(f;t)_{L_p} = \max_{|h|\leqslant t}\left[\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}f(\theta+\nu h)\right|^p d\sigma(\theta)\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{7}$$

$$E_n(f;T_n)_{L_p} = E_n(f)_{L_p} = \min_{T_n}\left[\int_0^{2\pi}|f(\theta)-T_n(\theta)|^p\,d\sigma(\theta)\right]^{\frac{1}{p}},$$

但 $T_n(\theta) = \sum_0^n (a_\nu\cos\nu\theta + b_\nu\sin\nu\theta)$. 我們知道[7][8]

$$E_n(f;T_n)_{L_p} \leqslant M_k\,\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_p}. \tag{8}$$

当 $k \leqslant 2$ 时，在代数多项式追近的理論，相当于(8)的不等式

$$E_n(f;p_n)_{L_p} \leqslant M_k\,\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right)_{L_p} \tag{9}$$

也成立. 事实上，把 $[a, b]$ 变成 $[-1, +1]$ 而置 $x = \cos\theta$，就容易从(8)导出(9)，M_k 光是和 k 有关系. 从上面的理論，我們得到

$$\sum_{n=M}^{\infty} c_n^2 n\log n\cdot h(n) \leqslant C_k\int_0^\eta h(t)\omega_k^2(f;t)_{L_2}\,dt, \tag{10}$$

C_k 和 η 是适当的常数.

順次取 $h(t)$ 为 $\frac{\log n}{t}$ 和 $\frac{\log\log t}{t\log t}$，我們可述下面两个定理，这些結果分别是定理 1 和定理 2 的改进.

定理 3. 对于某一自然数 k，假如积分

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \omega_k^2(f;t)_{L_2}\log\frac{1}{t}\,\frac{dt}{t}$$

收斂,那末直交多項式級数(2)在它的直交性区間中几乎处处收斂.

定理 4. 設 k 是 1 或 2,假如积分

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \omega_k^2(f;t)_{L_2} \frac{\left(\log\log\frac{1}{t}\right)^2}{t\log\frac{1}{t}}\frac{dt}{t}$$

收斂,那末(2)在它的直交性区間中,几乎处处可用 (C, α) 求和法求和,但 $\alpha > 0$.

4. 現在考虑(2)的无条件收斂問題.我們需要奥尔列契(Orlicz)[9] 的定理:

引理 2. 設 $0 < W(n) < W(n+1)$, $n_k < n_{k+1}$, $\log n_{k+1} \leqslant K \log n_k$,

$$\frac{1}{W(n_1)} + \frac{1}{W(n_2)} + \cdots < \infty.$$

那末,当級数 $\sum c_n^2 W(n) \log^2 n$ 收斂时,直交函数級数(2)无条件地几乎处处收斂.

为簡便起見,写着 $l_1(t) = |\log t|$, $l_{\nu+1}(t) = |\log l_\nu(t)|$,

$$\lambda(t) = l_1(t) l_2(t) \cdots l_{j-1}(t) l_j(t)^p, \ (p > 1, \ j > 1).$$

函数 $W(t) = \lambda(t)/l_1(t)$ 当 t 相当大的时候,是 t 的增加函数.設 $N > 80$,取 $n_k = N^{N^k}$,那末 $l_2(t) > k$;因此

$$W(n_k) > k l_1(k) \cdots l_{j-3}(k) l_{j-2}(k)^p,$$

$$\log n_{k+1} = N \log n_k, \ \sum 1/W(n_k) < \infty.$$

由引理 2,我們得到

定理 5. 設 $p > 1$.假如級数

$$\sum c_n^2 l_1(n)^2 (l_2(n) l_3(n) \cdots l_{j-1}(n) l_j(n)^p) \tag{11}$$

收斂,那末級数(2)无条件地几乎处处收斂.

当 t 相当大的时候,$h(t) = t^{-1}\lambda(t)$ 是 t 的減少函数,并且成立着

$$l_1(t)(th(t))' = h(t)\left(1 + \frac{1}{l_2(t)} + \frac{1}{l_2(t) l_3(t)} + \cdots + \frac{p}{l_2(t) \cdots l_j(t)}\right) < 2h(t).$$

因此 $h(t)$ 滿足引理 1 的(3).故由引理 1 和不等式(9),得到

$$\sum_{n=M}^{\infty} c_n^2 n \log n\, h(n) \leqslant A_k \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \left[\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_2}\right]^2. \tag{12}$$

从(12)和定理 5 得到

定理 6. 設 j, k 是两个自然数,$p > 1$, $\eta > 0$.假如积分

$$\int_0^{\eta} \frac{l_1(t) \cdots l_{j-1}(t) l_j(t)^p}{t} [\omega_k(f; t)_{L_2}]^2 \, dt$$

当 $k = 1$ 或 2 时收斂,那末 $f(x)$ 的直交多項式展开(2)无条件地几乎处处收斂.

注意. 著者在 1957 的論文[10]中,証明:"$\omega(f;t) < \frac{1}{\lambda(t)}$ 含有(2)的无条件地几乎处处收斂".这个結果为定理 6 所改进.

5. 显然地,上文所建立的任一定理,对于三角級数

$$dF(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{13}$$

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(t)\,d\sigma(t), \quad \sigma'(t) > 0,$$

而言，成立着相对应的定理．事实上，$h(t)$ 满足引理 1 中的条件的时候，成立着不等式

$$\sum_{n=M}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\, n \log n \cdot h(n) \leqslant \int_0^\eta C_k\, h(t)\,[\omega_k(f;\, t)_{L_2}]^2 dt, \tag{14}$$

$\omega_k(f;\, t)$ 是由(7)定义，C_k 仅与 k 有关系．

关于(13)的概收斂，我們可用迫賴斯納(Plessner)的定理而不用孟孝夫和拉特馬叽的定理．置 $h(t) = \frac{1}{t}$ 于(14)，就得到下面的

定理 7. 假如函数 $f(\theta)$ 能使积分

$$\int_0^\eta [\omega_k(f;\, t)_{L_2}]^2 \frac{dt}{t}$$

收斂，那末三角級数(13)几乎处处收斂．

在討論(13)的无条件收斂之前，先建立

引理 3. 設 $h(t)$ 满足引理 1 中条件，并且积分 $\int_1^\infty h(t)\,t^{-1} dt$ 收斂，那末級数

$$\sum h(n)\,[E_n(f)_{L_p}]^2 \tag{15}$$

收斂的充要条件是积分

$$\int_0^\eta h(n)\,[\omega_k(f;\, t)_{L_p}]^2 d\theta \quad (\eta > 0) \tag{16}$$

对于某一对的数 k, η 收斂．

証． 由(8)或是(9)，$\sum h(n)\left[\omega_k\left(f;\, \frac{1}{n}\right)_{L_2}\right]^2$ 的收斂含有 $\sum h(n)\,[E_n(f)_{L_p}]^2$ 的收斂．因此，积分(16)收斂的話，級数 $\sum h(n)\,[E_n(f)_{L_p}]^2$ 收斂．

現在从級数 $\sum h(n)\,(E_n(f)_{L_p})^2$ 的收斂，导出(16)的收斂性．我們利用已知的公式[7]：

$$\omega_k\left(f;\, \frac{1}{n}\right)_{L_p} \leqslant \frac{M_k}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_{\nu-1}(f)_{L_p}$$

而得到

$$\sum_{1}^{N} h(n)\left[\omega_k\left(f;\, \frac{1}{n}\right)_{L_p}\right]^2 \leqslant C_k \sum_{n=1}^{N} h(n)\left[n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_{\nu-1}(f)_{L_p}\right]^2.$$

由柯西和蒲尼亚可夫斯的不等式，上式右边的和小于

$$\sum_{n=1}^{N} h(n)\, n^{-2k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2k-2} \sum_{\nu=1}^{n} [E_{\nu-1}(f)_{L_p}].$$

由是

$$\sum_{n=1}^{N} h(n)\left[\omega_k\left(f;\, \frac{1}{n}\right)_{L_p}\right]^2 \leqslant C_k \sum_{n=1}^{N} \frac{h(n)}{n} \sum_{\nu=1}^{n} [E_{\nu-1}(f)_{L_p}]^2 =$$

$$= C_k \sum_{\nu=1}^{N} [E_{\nu-1}(f)_{L_p}]^2 \sum_{n=\nu}^{N} \frac{h(n)}{n}.$$

当 $t > 9$ 时，$(th(t))' < \frac{h(t)}{\log t} < \frac{1}{2} h(t)$. 这样，从等式

$$\int_v^\infty \frac{h(t)}{t} dt = \int_v^\infty \frac{(th(t))'}{t} dt - [h(t)]_v^\infty$$

可以导出不等式

$$\sum_{v+1}^N h(n) n^{-1} < \int_v^\infty h(t) t^{-1} dt < 2h(v).$$

因此得到

$$\sum_{n=1}^N h(n) \left[\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_p} \right]^2 \leqslant 2C_k \sum_{v=1}^N [E_{v-1}(f)_{L_p}]^2 h(v-1).$$

这就完成了引理 3 的証明.

通过引理 3，我們从定理 6 导出下述的

定理 8. 对于某一自然数 j 和大于 1 的数 p，假如級数

$$\sum_{n=M}^\infty \frac{1}{n} l_1(n) l_2(n) \cdots l_{j-1}(n) l_j(n)^p [E_n(f)_{L_2}]^2$$

收斂，那末函数級数 (2) 或是 (13) 无条件地几乎处处收斂.

在三角級数的情况，当 $j = 2$ 时，定理 8 是由烏利亚諾所証明的[12].

参　考　文　献

[1] Menchoff, D., Sur les séries de fonctions orthogonales. *Rund. Math.*, **4** (1923), 82—105; Fund. Math. 8 (1926) 56—108.

[2] Borgen, S., Über (C, 1)-Summierbarkeit von Reihen orthogonaler Funktionen. *Math. Annalen*, **98** (1928), 125—150.

[3] Kaczmarz, St., Über die Summierbarkeit der Orthogonalreiehen. *Math. Zeit.*, **26** (1927), 99—105.

[4] Chen, K. K., On the system of normalized orthogonal functions. *Tôhoku Math. Journal*, **29** (1928), 1—9.

[5] Rademacher, H., Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthonal funktionen. *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

[6] Натансон, И. П., К вопросу о разложений функций по ортогональном полиномам. *Изв. АН СССР, серия физ-матем.*, (1938), 85—88.

[7] Тиман, М. Ф., Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. *Матем. Сб.*, **46** (1958), 125—132.

[8] Тиман, А. Ф., и Тиман, М. Ф., Обобщенный модуль непреры вности и наилучшее приближение в среднοм. *ДАН СССР*, **71** (1950), 17—20; Стечкин, С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных фукций. *Изв. АН СССР, серия матем.*, **15** (1951), 219—242.

[9] Kaczmarz, St., und Steinhaus, H., *Teorie der Orthogonalreihen*, 170—172 (1935).

[10] Chen, K. K., On the series of orthogonal polynomials. *Science Record*, **1** (1957), 13—18.

[11] Plessner, A., Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen. *Journal für Math.*, **155** (1925), 15—25.

[12] Ульянов, П. Л., О рядах по переставленной тригонометрической системе. *Изв. АН СССР*, **22** (1958), 515—542.

SUMMABILITY OF THE SERIES OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

CHEN KIEN-KWONG
(*Fuh-tan University*)

ABSTRACT

Let $\{p_n(x)\}$ be a system of polynomials normalized and orthogonal in (a, b) with the weight $\tau(x)$, $p_n(x)$ being of the degree n. The chief object of this paper is to discuss the summability of the series

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x),\ c_n = \int_a^b f(x) p_n(x) \tau(x) dx. \tag{1}$$

Letting $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ and supposing $f(x) \in L_p(a,b)$, $p > 1$, we write

$$E_n(f; p_n)_{L_p} = \min_{p_n(x)} \left[\int_a^b |f(x) - p_n(x)|^p \tau(x) dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\omega_k(f; t)_{L_p} = \max_{|h| \leq t} \left[\int_a^b \left| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x + \nu h) \right|^p \tau(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Firstly we prove the following theorem:

1) If the integral $\int_0^{1/e} \omega_2^2(f; t)_{L_2} \log \frac{1}{t} \frac{dt}{t}$ converges then (1) converges p. p.

2) If the integral $\int_0^{1/e} \omega_X^2(f; t)_{L_2} \frac{\log \log \frac{1}{t}}{t \log \frac{1}{t}} dt$ converges, then (1) is summable (C, α) p. p. for any $\alpha > 0$.

The proposition (1) improves a theorem of Натансон[6]. The proof of 2) is based on Menchoff's (C, α)-summability theorem[1].

Secondly, using a theorem of Orlicz and writing $l_1(t) = |\log t|$, $l_{\nu+1}(t) = |\log l_\nu(t)|$, $\lambda_j(t, p) = l_1(t) \cdots l_{j-1}(t) l_j^p(t)$, we prove

3) If the series $\sum c_n^2 l_L(n) \lambda_j(n, p)$ converges for a number p greater than unity, then (1) unconditionally converges p. p.

From this theorem, we derive

4) Let j and k be two natural numbers, $p > 1$, $k = 1, 2$. If the integral $\int_0^\eta \lambda_j(t, p) \cdot [\omega_k(f; t)_{L_2}]^2 \frac{dt}{t}$ converges then (1) unconditionally converges p. p.

This result 4) improves author's previous theorem[10], and is equivalent to the following proposition:

5) If the series $\sum n^{-1} \lambda_j(n, p) [E_n(f)_{L_2}]^2$ converges, then (1) unconditionally converges p. p.

The foregoing theorems hold also good for the trigonometric series

$$dF(\theta) \sim \frac{1}{2}a + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{2}$$

where $F(\theta) = \int_0^\theta f(t) d\sigma(t)$ with $\sigma'(t) > 0$ $(t > 0)$. However, in the place of (1) we can establish

6) If $\int_0^\pi [\omega_k(f(\theta); t)_{L_2}]^2 \frac{dt}{t} < \infty$, then (2) converges p. p., where $f(\theta) \equiv f(\theta + 2\pi)$.

第10卷 第1期 数学学报 Vol. 10, No. 1
1960年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA March, 1960

蔡查罗求和法在巴拿赫空間*

李 訓 經
（上海数学研究所，复旦大学）

1. 总說 設 α 是一实数而不是一个負整数，E 是一巴拿赫空間，当 $u \in E$ 时，以 $\|u\|$ 記元素 u 的模. 設 $u_i \in E \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$，級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i \tag{U}$$

的 α 級第 n 蔡查罗平均是

$$\sigma_n^\alpha(U) = \frac{1}{A_n^\alpha} S_n^\alpha(U),$$

此地

$$S_n^\alpha(U) = \sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^\alpha u_i,$$

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}.$$

如果当 $n \to \infty$ 时，$\sigma_n^\alpha(U)$ 收斂于 u，$u \in E$，那末我們說級数 (U) 可以 (C, α) 求和于 u. 联系着級数 (U)，我們也考虑級数

$$\sum_{i=1}^{\infty} i u_i \tag{T}$$

及其 α 級蔡查罗平均 $\sigma_n^\alpha(T) = (A_n^\alpha)^{-1} \sum_{i=1}^{n} A_{n-i}^\alpha i u_i$.

G. Alexits[1] 証明：設 $\alpha = 1$，关系

$$\|u - \sigma_n^\alpha(U)\| = O\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

成立的充要条件是

$$\|\sigma_n^\alpha(T)\| = O(1).$$

J. Favard[2] 拓广 G. Alexits 的結果于任一自然数 $\alpha = k$.

本文拓广 Favard 的結果到任一正数 α. 关于冪級数的 $(C, 1)$ 平均曾为 С. Б. Стечкин[3] 研究，А. К. Покало[4] 研究了冪級数的一类相当广泛的求和法，包含了 (C, k)，我們把它拓广到任一正数級 α 的 (C, α).

2. 首先建立几个等式

設 $\alpha \neq -1, -2, \cdots$，那末

---

* 1959年1月18日收到.

$$S_n^\alpha(T) = -(\alpha+1)\sum_{i=0}^{n} S_i^\alpha(U) + (\alpha+1+n)S_n^\alpha(U), \tag{1}$$

$$\sigma_n^\alpha(T) = -\frac{\alpha+1}{A_n^\alpha}\sum_{i=0}^{n} A_i^\alpha[\sigma_i^\alpha(U)-u] + (\alpha+1+n)[\sigma_n^\alpha(U)-u], \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n^\alpha(U) &= u_0 + \frac{1}{2+\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i^\alpha(T)}{A_{i-1}^{2+\alpha}} + \frac{1}{\alpha+n+1}\cdot\frac{S_n^\alpha(T)}{A_n^\alpha} = \\ &= u_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)}\sigma_i^\alpha(T) + \frac{\sigma_n^\alpha(T)}{\alpha+n+1}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

証. 根据 $S_i^\alpha(U)$ 的定义,

$$\sum_{i=0}^{n} S_i^\alpha(U) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j}^\alpha u_j = \sum_{j=0}^{n} u_j \sum_{i=j}^{n} A_{i-j}^\alpha.$$

由于

$$\sum_{i=j}^{n} A_{i-j}^\alpha = A_{n-j}^{\alpha+1} = \frac{\alpha+n-j+1}{\alpha+1}A_{n-j}^\alpha,$$

故上式右端等于

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{n}(\alpha+n-j+1)A_{n-j}^\alpha u_j = \frac{\alpha+n+1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{n}A_{n-j}^\alpha u_j - \frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=1}^{n}A_{n-j}^\alpha j u_j,$$

由是得到(1). 从(1)就得到(2).

(3) 的第二个等式容易从

$$\frac{A_i^\alpha}{A_{i-1}^{2+\alpha}} = \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+i)}{i!}\cdot\frac{(i-1)!}{(3+\alpha)\cdots(i+\alpha+1)} = \frac{(2+\alpha)(1+\alpha)}{i(i+\alpha+1)}$$

明白. 现証 (3) 的第一个等式. 当 $n=0$ 时它显然成立. 当 $n=1$ 时, 它的左端是 $u_0 + \frac{1}{\alpha+1}u_1$, 而它的右端是

$$u_0 + \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\sigma_1^\alpha(T) + \frac{1}{2+\alpha}\sigma_1^\alpha(T) = u_0 + \sigma_1^\alpha(T) = u_0 + \frac{u_1}{\alpha+1},$$

故此时等式成立.

现在假設当 $n=1, 2, \cdots, p-1$ 时, (3)的第一个等式成立. 那末由 (1) 得到

$$S_p^\alpha(T) = -(\alpha+1)u_0 - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{p-1}S_i^\alpha(U) + pS_p^\alpha(U).$$

因此

$$\begin{aligned}pS_p^\alpha(U) &= (\alpha+1)u_0 + (\alpha+1)\sum_{i=1}^{p-1}\left\{A_i^\alpha u_0 + \frac{A_i^\alpha}{2+\alpha}\sum_{j=1}^{i}\frac{S_j^\alpha(T)}{A_{j-1}^{2+\alpha}} + \frac{S_i^\alpha(T)}{\alpha+i+1}\right\} + S_p^\alpha(T) = \\ &= (\alpha+1)\sum_{i=0}^{p-1}A_i^\alpha u_0 + \frac{1+\alpha}{2+\alpha}\sum_{i=1}^{p-1}A_i^\alpha\sum_{j=1}^{i}\frac{S_j^\alpha(T)}{A_{j-1}^{2+\alpha}} + (\alpha+1)\sum_{i=1}^{p-1}\frac{S_i^\alpha(T)}{\alpha+i+1} + S_p^\alpha(T).\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{i=0}^{p-1}A_i^\alpha = A_{p-1}^{\alpha+1} = \frac{p}{\alpha+1}A_p^\alpha,$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} A_i^\alpha \sum_{j=1}^{i} \frac{S_j^\alpha(T)}{A_{j-1}^{2+\alpha}} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{S_j^\alpha(T)}{A_{j-1}^{2+\alpha}} \sum_{i=j}^{p-1} A_i^\alpha = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{S_j^\alpha(T)}{A_{j-1}^{2+\alpha}} (A_{p-1}^{\alpha+1} - A_{j-1}^{\alpha+1}) =$$

$$= \frac{p}{\alpha+1} A_p^\alpha \sum_{j=1}^{p-1} \frac{S_j^\alpha(T)}{A_{j-1}^{2+\alpha}} - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\alpha+2}{\alpha+j+1} S_j^\alpha(T),$$

所以 $pS_p^\alpha(U)$ 等于

$$pA_p^\alpha u_0 + \frac{pA_p^\alpha}{2+\alpha} \sum_{j=1}^{p-1} \frac{S_j^\alpha(T)}{A_{j-1}^{2+\alpha}} + S_p^\alpha(T) =$$

$$= pA_p^\alpha \left\{ u_0 + \frac{1}{2+\alpha} \sum_{j=1}^{p} \frac{S_j^\alpha(T)}{A_{j-1}^{2+\alpha}} \right\} + S_p^\alpha(T) \cdot \left\{ 1 - \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \cdot \frac{A_{p-1}^{1+\alpha}}{A_{p-1}^{2+\alpha}} \right\}.$$

注意

$$1 - \frac{1+\alpha}{2+\alpha} \cdot \frac{A_{p-1}^{1+\alpha}}{A_{p-1}^{2+\alpha}} = 1 - \frac{\alpha+1}{\alpha+p+1} = \frac{p}{\alpha+p+1},$$

我們就得到(3).

3. 定理 1. 設 $\alpha > 0$, 那末关系

$$\|u - \sigma_n^\alpha(U)\| = O\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

成立的充要条件是

$$\|\sigma_n^\alpha(T)\| = O(1).$$

証. 設 $\|\sigma_n^\alpha(T)\| \leqslant M$, M 是一常数. 設 $p > n$, 由(3)得

$$\sigma_p^\alpha(U) - \sigma_n^\alpha(U) = \sum_{j=n+1}^{p} \frac{\alpha+1}{j(j+\alpha+1)} \sigma_j^\alpha(T) + \frac{\sigma_p^\alpha(T)}{\alpha+p+1} - \frac{\sigma_n^\alpha(T)}{\alpha+n+1}.$$

右端的模等于 $O\left(\frac{M}{n}\right) = o(1)$. 由于空間 E 的完备性, 当 $p \to \infty$ 时, $\sigma_p^\alpha(U)$ 有极限 u. 由是, 从

$$u - \sigma_n^\alpha(U) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{j(j+\alpha+1)} \sigma_j^\alpha(T) - \frac{\sigma_n^\alpha(T)}{\alpha+n+1} \tag{4}$$

得到

$$\|u - \sigma_n^\alpha(U)\| \leqslant M \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+\alpha+1} \right) + \frac{M}{\alpha+n+1} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+[\alpha]+2} \right) + \frac{M}{\alpha+n+1} \leqslant \frac{\alpha+2}{n+1} M.$$

反之, 如果

$$\|u - \sigma_n^\alpha(U)\| \leqslant \frac{N}{n+1},$$

那末由(2)得到

$$\|\sigma_n^\alpha(T)\| \leqslant \frac{\alpha+1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i^\alpha}{i+1} \cdot N + \frac{\alpha+1+n}{n+1} N = O(1).$$

定理 2. 設 $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots$, $\lambda_n \to 0$, $\alpha > 0$, $t \in E$,

$$\|\sigma_n^\alpha(T) - t\| \leqslant \lambda_n,$$

那末当 $n \to \infty$ 时 $\sigma_n^\alpha(U)$ 有极限 $u \in E$, 且

$$u - \sigma_n^\alpha(U) = \left\{ \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha+n+1} \right\} t + \frac{\alpha+3}{n+1} \theta_n \lambda_n,$$

此地 $\theta_n \in E$, $\|\theta_n\| \leqslant 1$.

証. 由假設 $\sigma_n^\alpha(T) = t + \eta_n \lambda_n$, $\eta_n \in E$, $\|\eta_n\| \leqslant 1$. 由定理 1, $\sigma_n^\alpha(U)$ 收斂于 E 的一个元素 u. 由(4),

$$u - \sigma_n^\alpha(U) = \left\{ \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha+n+1} \right\} t + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)} \eta_i \lambda_i - \frac{\eta_n \lambda_n}{\alpha+n+1},$$

由于 λ_n 的单調性,上式右端最后两項和的模不超过

$$\lambda_n \left\{ \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)} + \frac{1}{\alpha+n+1} \right\} \leqslant \frac{\alpha+3}{n+1} \lambda_n.$$

定理証毕.

現在証明定理 2 的逆.

定理 3. 設 $\alpha > 0$, $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots$, $\lambda_n \to 0$. 設 u, t, η_n 都属于 E, $\|\eta_n\| \leqslant 1$. 假如

$$u - \sigma_n^\alpha(U) = \frac{\alpha}{n+1} t + \frac{\eta_n \lambda_n}{n+1}. \tag{5}$$

那末序列 $\{\sigma_n^\alpha(T)\}$ 具有极限 t.

証. 我們首先注意

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha+n+1} = \frac{\alpha}{n+1} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

所以定理 3 是定理 2 的逆.

从(2)和(5),

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n^\alpha(T) &= \frac{\alpha+1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{n} A_i^\alpha [u - \sigma_i^\alpha(U)] - (\alpha+1+n)[u - \sigma_n^\alpha(U)] = \\ &= \frac{\alpha+1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha A_i^\alpha}{i+1} t - \frac{\alpha+1+n}{n+1} \cdot \alpha t + \frac{\alpha+1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i^\alpha \eta_i \lambda_i}{i+1} - \frac{\alpha+1+n}{n+1} \eta_n \lambda_n. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由于 $A_n^\alpha \simeq \dfrac{(n+1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, 所以

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{A_i^\alpha}{i+1} \simeq \sum_{i=0}^{n} (i+1)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \simeq \frac{(n+1)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha+1)} \simeq \frac{A_n^\alpha}{\alpha}.$$

記着 $\lambda_n = o(1)$, 我們得到

$$\|\sigma_n^\alpha(T) - t\| \leqslant o(1) + \frac{\alpha+1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i^\alpha \lambda_i}{i+1} = o(1).$$

定理証毕.

定理 3 可以精确化如下:

定理 4. 設 $\alpha > \beta > 0$, $\beta \leqslant 1$, $u, t \in E$. 假如

$$\left\| u - \sigma_n^\alpha(U) - \frac{\alpha}{n+1} t \right\| = O\left(\frac{1}{(n+1)^{1+\beta}}\right), \tag{7}$$

那末

$$\|\sigma_n^\alpha(T)-t\|=O\left(\frac{1}{(n+1)^\beta}\right).$$

証，利用

$$A_n^\alpha=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}=\frac{(n+1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+O((n+1)^{\alpha-1})$$

来估計(6)中的和，我們得到，当 $\alpha\neq 1$ 时

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha A_i^\alpha}{i+1}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(i+1)^{\alpha-1}+O\left(\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{\alpha-2}\right)=$$

$$=\frac{(n+1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+O\left(\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{\alpha-2}\right)=\frac{(n+1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+O((n+1)^{\alpha-1})+O(1),$$

而当 $\alpha=1$ 时，直接可得

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{A_i^1}{i+1}=\sum_{i=0}^{n}1=\frac{n+1}{\Gamma(2)}.$$

利用上面的結果和(7)，那末从(6)可以导出

$$\|\sigma_n^\alpha(T)-t\|=O\left(\frac{1}{n+1}\right)+O\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)+O\left(\frac{1}{(n+1)^\beta}\right)+O\left(\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{i=0}^{n}\frac{A_i^\alpha}{(i+1)^{1+\beta}}\right).$$

末項是

$$O\left(n^{-\alpha}\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{\alpha-\beta-1}\right)=O\left(\frac{1}{(n+1)^\beta}\right).$$

这就証明了定理 4.

为了进一步的討論，我們引进一个記号．設 $\alpha>0$，r 是一自然数，数序列 $A=\{a_i\}$ 是有界的，我們定义

$$[L_n^\alpha]_1(A)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)}a_i-\frac{a_n}{\alpha+n+1},$$

$$[L_n^\alpha]_2(A)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)}[L_i^\alpha]_1(A)-\frac{[L_n^\alpha]_1(A)}{\alpha+n+1},\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

. . . .

$$[L_n^\alpha]_r(A)=[L_n^\alpha]_1([L_i^\alpha]_{r-1}(A))=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)}[L_i^\alpha]_{r-1}(A)-\frac{[L_n^\alpha]_{r-1}(A)}{\alpha+n+1}.$$

容易驗証：若 $A+B=\{a_i+b_i\}$，$\lambda A=\{\lambda a_i\}$，那末当 $n=0,1,2,\cdots$ 时，

$$[L_n^\alpha]_1(A+B)=[L_n^\alpha]_1(A)+[L_n^\alpha]_1(B),$$
$$[L_n^\alpha]_1(\lambda A)=\lambda[L_n^\alpha]_1(A),$$
$$[L_n^\alpha]_r(A+B)=[L_n^\alpha]_r(A)+[L_n^\alpha]_r(B),$$
$$[L_n^\alpha]_r(\lambda A)=\lambda[L_n^\alpha]_r(A).$$

在下面用到的是 $A=I=\{1\}$，此时我們簡写 $[L_n^\alpha]_r(I)$ 为 $[L_n^\alpha]_r$.

引理 1. 对于任何自然数 r 及任何正数 α，当 $n\to\infty$ 时

$$[L_n^\alpha]_r = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!(n+1)^r} + O\left(\frac{1}{(n+1)^{r+1}}\right).$$

証. 此式当 $r=1$ 时,已述于前. 今設它当 r 时成立,那末从

$$[L_n^\alpha]_{r+1} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)}[L_i^\alpha]_r - \frac{[L_n^\alpha]_r}{\alpha+n+1} =$$

$$= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!(i+1)^{r+2}} - \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!(n+1)^{r+1}} + O\left(\frac{1}{(n+1)^{r+2}}\right),$$

就得到

$$[L_n^\alpha]_{r+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r)}{(r+1)!(n+1)^{r+1}} + O\left(\frac{1}{(n+1)^{r+2}}\right).$$

引理 1 証明完毕.

引理 2. 設 k 和 r 都是自然数. 假如 $r>k$, 那末 $[L_n^k]_r = 0$, 当 $r \leqslant k$ 时

$$[L_n^k]_r = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant k} \frac{1}{(n+i_1)(n+i_2)\cdots(n+i_r)}.$$

証. 当 $r=1$ 时,

$$[L_n^k]_1 = \sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+k+1}\right) - \frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k}.$$

若 $r=p<k$ 时引理成立,則当 $r=p+1$ 时引理也成立. 事实上,于

$$[L_n^k]_{p+1} = \sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+k+1}\right)[L_i^k]_p - \frac{[L_n^k]_p}{n+k+1}$$

代入 $[L_n^k]_p$ 的值,并項即得

$$[L_n^k]_{p+1} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant k} \frac{1}{(i+i_1)\cdots(i+i_p)} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i+k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant k} \frac{1}{(i+i_1)\cdots(i+i_p)} =$$

$$= \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_{p+1} \leqslant k+1} \frac{1}{(i+i_1)(i+i_2)\cdots(i+i_{p+1})} -$$

$$- \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p < i_{p+1} = k+1} \frac{1}{(i+i_1)\cdots(i+i_{p+1})} =$$

$$= \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p+1} \leqslant k} \frac{1}{(i+i_1)(i+i_2)\cdots(i+i_{p+1})} +$$

$$+ \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p < i_{p+1} = k+1} \frac{1}{(i+i_1)(i+i_2)\cdots(i+i_{p+1})} -$$

$$- \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{2 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p+1} \leqslant k+1} \frac{1}{(i+i_1)(i+i_2)\cdots(i+i_{p+1})} -$$

$$- \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p+1} = k+1} \frac{1}{(i+i_1)\cdots(i+i_{p+1})} =$$

$$=\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{p+1}\leqslant k}\frac{1}{(i+i_1)\cdots(i+i_{p+2})}-$$

$$-\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{p+1}\leqslant k}\frac{1}{(i+i_1)(i+i_2)\cdots(i+i_{p+1})}.$$

由是当 $r\leqslant k$ 时引理成立．又因

$$[L_n^k]_{k+1}=\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+k+1}\right)\frac{1}{(i+1)(i+2)\cdots(i+k)}-\frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)(n+k+1)}=$$

$$=\sum_{i=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{i(i+1)\cdots(i+k)}-\frac{1}{(i+1)\cdots(i+k+1)}\right]-\frac{1}{(n+1)\cdots(n+k+1)}=0.$$

故当 $r>k$ 时 $[L_n^k]_r=0$．引理証毕．

定理 5. 設 $\alpha>0$, $\lambda_0\geqslant\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant\cdots$, $\lambda_n\to 0$, l 是一自然数．若关系

$$\sigma_n^\alpha(T)-t=\sum_{r=1}^{l}[L_n^\alpha]_r\cdot t_r+\eta_n\lambda_n\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

对于 E 的元素 t, t_1, $\cdots$, t_l 及 η_n 成立，并且 $\|\eta_n\|\leqslant 1$，那末序列 $\{\sigma_n^\alpha(U)\}$ 收斂于 E 的一个元素 u，此时

$$u-\sigma_n^\alpha(U)=[L_n^\alpha]_1\cdot t+\sum_{r=1}^{l}[L_n^\alpha]_{r+1}\cdot t_r+\frac{\alpha+3}{n+1}\theta_n\lambda_n,$$

此地 $\theta_n\in E$, $\|\theta_n\|\leqslant 1$.

証. 由定理 1, $\sigma_n^\alpha(U)$ 在 E 中有极限 u．应用等式(4)，得到

$$u-\sigma_n^\alpha(U)=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)}-\frac{1}{n+\alpha+1}\right)t+$$

$$+\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)}\sum_{r=1}^{l}[L_i^\alpha]_r\cdot t_r-\frac{1}{n+\alpha+1}\sum_{r=1}^{l}[L_n^\alpha]_r\cdot t_r\right)+$$

$$+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)}\eta_i\lambda_i-\frac{\eta_n\lambda_n}{\alpha+n+1}=$$

$$=[L_n^\alpha]_1\cdot t+\sum_{r=1}^{l}[L_n^\alpha]_{r+1}\cdot t_r+\frac{\alpha+3}{n+1}\theta_n\lambda_n,$$

由是定理得証．

当 $\alpha=1$ 时，由引理 2 得到 С. Б. Стечкин 的結果（[3] 引理 4）．

系. 在定理 5 的假設下，当 $\alpha=k$ 是自然数时，那末

$$u-\sigma_n^k(U)=[L_n^k]_1\cdot t+\sum_{r=1}^{\min(l-1,k)}[L_n^k]_{r+1}\cdot t_r+\frac{\alpha+3}{n+1}\theta_n\lambda_n.$$

4. 福里埃級数的蔡查罗求和　設 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它和 $|f(x)|^p$, $1\leqslant p<\infty$，在区間 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上都是勒貝格可积的：$f(x)\in L^p(0,2\pi)$．函数族 $L^\infty(0,2\pi)$ 是 $L^p(0,2\pi)$ 的子族，其中函数都是連續函数．記

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_p = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left(\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\omega(\delta, f) = \omega_\infty(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_\infty = \sup_{|h| \leqslant \delta} \max_x |f(x+h) - f(x)|.$$

当 $\omega_p(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ 时，$f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$. 福里埃級数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

的共軛級数是

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx).$$

极限式——除开一个零集——

$$\lim_{r \to 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) r^k = \tilde{f}(x)$$

定义着 $f(x)$ 的共軛函数.

A. Zygmund[5] 証明：当 $f(x) \in \mathrm{Lip}(1, p)$ 时

$$\|\tilde{f} - \tilde{\sigma}_n^1\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^1(x, p)|^p dx \right)^{1/p} = O\left(\frac{1}{n+1} \right), \tag{8}$$

且指出当 $\alpha > 0$ 时

$$\|\tilde{f} - \tilde{\sigma}_n^\alpha\|_p = O\left(\frac{1}{n+1} \right) \tag{9}$$

仍成立. 后来 G. Alexits[1] 証明(8)是 $f(x) \in \mathrm{Lip}(1, p)$ 的充要条件. 現在我們証明

定理 6. 設 $\alpha > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$, 那末(9)是 $f(x) \in \mathrm{Lip}(1, p)$ 的充要条件.

証. 首先設 $1 < p < \infty$. 我們从 Hardy–Littlewood[6] 定理知道：当 $f(x) \in \mathrm{Lip}(1, p)$ 时，有一絕对連續函数 $g(x)$，它几乎处处等于 $f(x)$. 級数

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{10}$$

的 α 級第 n 蔡查罗平均 $\bar{\sigma}_n^\alpha(x)$ 就是函数 $g'(x)$ 的福里埃級数的 α 級第 n 蔡查罗平均：写着

$$K_n^\alpha(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha} \cos kt,$$

$$\bar{\sigma}_n^\alpha(x) = \sigma_n^\alpha(x, g') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g'(x+t) K_n^\alpha(t) dt.$$

由是

$$\|\bar{\sigma}_n^\alpha(x)\|_p \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_n^\alpha(t)| \left(\int_0^{2\pi} |g'(x+t)|^p dx \right)^{1/p} dt = O(1). \tag{11}$$

由定理 1,

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n^\alpha(x, f)\|_p = O\left(\frac{1}{n+1} \right).$$

反之，(9) 含有 (11)，由此級数 (10) 是 $L^p(0, 2\pi)$ 中某一函数的福里埃級数[7]. 所以 $f(x)$ 几乎处处等于一絕对連續函数 $g(x)$, $g'(x) \in L^p(0, 2\pi)$. 由 Hardy–Littlewood 定理,

$f(x) \in \mathrm{Lip}(1, p)$.

次設 $p = 1$. 若 $f(x) \in \mathrm{Lip}(1, 1)$, 則由 Hardy-Littlewood 定理, $f(x)$ 等价于一有界变差函数 $g(x)$, 那末級数(10)对应于 $dg(x)$, 且

$$\|\bar{\sigma}_n^\alpha(x)\|_L \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |dg(t)| \cdot \int_0^{2\pi} |K_n^\alpha(t)|\, dt = O(1).$$

由定理 1 就得到(9). 反之,若(9)成立, 那末(11)成立, 从而[7] 級数(10)是一有界变差函数的福里埃-斯底尔阶級数. 由 Hardy-Littlewood 定理, $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(1, 1)$.

最后設 $p = \infty$. 若 $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(1, \infty)$, 則 $f'(x)$ 几乎处处存在且有界, 从而 $\bar{\sigma}_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是均匀有界的,由定理 1 就得到(9). 反之,若(9)成立,那末 $\bar{\sigma}_n^\alpha(x) = O(1)$, 从而[7] 級数(10)是一有界函数的福里埃級数. 故 $f(x)$ 是一絕对連續函数, 且其导数几乎处处存在且有界,即函数 $f(x) \in \mathrm{Lip}(1, \infty)$. 定理証毕.

由定理 6 立刻可以得到 A. Zygmund 所指出的但未加証明的

定理 7. 設 $\alpha > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$, 如果

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx},$$

那末

$$\|f(x) - \sigma_n^\alpha(x, f)\|_p = O\left[\omega_p\left(\frac{1}{n+1}; f\right)\right].$$

此定理对于 $p = \infty$ 时,陈建功教授[8] 曾在某些限制下給予了証明, 現在我們是对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 且对 $\omega_p(\delta, f)$没有加任何限制.

現在我們应用上面所得的种种結果来研究福里埃級数的蔡查罗平均数逼近函数的問題. 关于用福里埃級数的綫性求和法来逼近連續函数的問題, 曾为許多作者所研討[9-11]. С. М. Никольский[12] 曾在空間 L 中討論这种問題. 但对一般的 $L^p(0, 2\pi)$ $(1 < p < \infty)$的研究似乎还是空白. 現在我們对 (C, α) 求和法来討論 $L^p(0, 2\pi)$ 中的逼近問題.

定理 8. 設 $\alpha > 0$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, r 是一自然数. 設

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{inx},$$

假如 $f^{(r-1)}(x)$ 是絕对連續的,且 $f^{(r)}(x) \in L^p(0, 2\pi)$,那末

$$\left\| f(x) - \sigma_n^\alpha(x, f) - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} [L_n^\alpha]_{2\nu-1} \tilde{f}^{(2\nu-1)}(x) + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} [L_n^\alpha]_{2\nu} \cdot f^{(2\nu)}(x) \right\|_p =$$

$$= O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\, \omega_p\left(\frac{1}{n+1}; f^{(r)}\right)\right).$$

証. 設 $f(x)$絕对連續, $f'(x) \in L^p(0, 2\pi)$,那末由 $\tilde{f}'(x) = i f'(x)$ 知道 $\tilde{f}'(x) \in L^p(0, 2\pi)$. 由定理 7,

$$\|\tilde{f}'(x) - \tilde{\sigma}_n^\alpha(x, f')\|_p = O\left(\omega_p\left(\frac{1}{n+1}, \tilde{f}'\right)\right) = O\left(\omega_p\left(\frac{1}{n+1}, f'\right)\right),$$

此地的 $\tilde{\sigma}_n^\alpha(x, f') = \tilde{\sigma}_n^{\alpha\prime}(x, f)$, 故由定理 2 得到

$$\|f(x)-\sigma_n^\alpha(x,f)-[L_n^\alpha]_1\tilde{f}'(x)\|_p=O\left(\frac{1}{n+1}\omega_p\left(\frac{1}{n+1},f'\right)\right).$$

故当 $r=1$ 时定理成立. 用数学归納法及定理5可以完成定理的証明.

系[3]. 設 $1\leqslant p\leqslant+\infty$, r 是大于等于2的自然数,如果

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{inx},$$

$f^{(r-1)}(x)\in\mathrm{Lip}(1,p)$, 那末

$$\left\|f(x)-\sigma_n^1(x,f)-\frac{1}{n+1}\tilde{f}'(x)\right\|_p=O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right).$$

这只要注意到引理2,应用定理8即得.

对于非冪級数型的福里埃級数,我們有

定理9. 設 $\alpha>0$, $1<p<+\infty$, r 是一自然数, 假如 $f^{(r-1)}(x)$ 是絕对連續的, $f^{(r)}(x)\in L^p(0,2\pi)$, 那末

$$\|f(x)-\sigma_n^\alpha(x,f)-\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}[L_n^\alpha]_{2\nu-1}\tilde{f}^{(2\nu-1)}(x)+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]}[L_n^\alpha]_{2\nu}\cdot f^{(2\nu)}(x)\|_p=$$

$$=O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\omega_p\left(\frac{1}{n+1},f^{(r)}\right)\right).$$

証. 当 $r=0$ 时,作 $f(x)$ 的斯捷克洛夫函数

$$f_h(x)=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}f(x+t)dt,$$

那末[15]

$$\|f_h'(x)\|_p\leqslant\frac{1}{h}\omega_p(h,f);\quad\|f-f_h\|_p\leqslant\omega_p\left(\frac{h}{2},f\right).$$

由定理6,

$$\|\tilde{f}_h(x)-\tilde{\sigma}_n^\alpha(x,f_h)\|_p\leqslant\frac{A}{n+1}\cdot\frac{1}{h}\omega_p(h,f),$$

此地 A 是仅与 α 有关的常数. 由 M. Riesz 不等式

$$\|f_h(x)-\sigma_n^\alpha(x,f_h)\|_p\leqslant\frac{A}{n+1}\cdot\frac{1}{h}\omega_p(h,f).$$

所以

$$\|f(x)-\sigma_n^\alpha(x,f)\|_p\leqslant\|f-f_h\|_p+\|f_h-\sigma_n^\alpha(x,f_h)\|_p+\|\sigma_n^\alpha(x,f_h-f)\|_p\leqslant$$

$$\leqslant\omega_p\left(\frac{h}{2},f\right)+\frac{A}{n+1}\cdot\frac{1}{h}\omega_p(h,f)+C(\alpha)\|f_h-f\|_p\leqslant$$

$$\leqslant C(\alpha)\omega_p\left(\frac{h}{2};f\right)+\frac{A}{n+1}\cdot\frac{1}{h}\omega_p(h,f),$$

此地 $C(\alpha)$ 为仅与 α 有关的常数. 取 $h=\frac{1}{n+1}$, 即得到

$$\|f(x)-\sigma_n^\alpha(x,f)\|_p=O\left(\omega_p\left(\frac{1}{n+1},f\right)\right).$$

故定理当 $r=0$ 时成立,然后用数学归納法及定理5可以完成定理的証明.

系. 在定理的条件下，設 $\alpha=1$，那末

$$\left\|f(x)-\sigma_n^1(x,f)-\frac{1}{n+1}\tilde{f}'(x)\right\|_p=O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\omega_p\left(\frac{1}{n+1},f^{(r)}\right)\right).$$

現在我們証明一些逆定理．它們是以定理 3 和 4 为基础的，而不用 C. H. Беренштейн 的方法[13]，因为用他的方法得不到所要求的結果．

定理 10. 設 $\alpha>0$，$f(x)$ 是以 2π 为周期的連續的周期函数．如果

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\{\tilde{f}(x)-\tilde{\sigma}_n^\alpha(x,f)\}=\varphi(x)$$

关于 x 均匀地成立，此地 $\varphi(x)$ 是一有界函数，那末 $f(x)$ 有連續的导函数 $f'(x)$，并且 $\alpha f'(x)=\varphi(x)$.

如果 $\alpha>\beta>0$, $\beta\leqslant1$,

$$\tilde{f}(x)-\tilde{\sigma}_n^\alpha(x,f)=\frac{\varphi(x)}{n+1}+O\left(\frac{1}{(n+1)^{1+\beta}}\right)$$

关于 x 均匀地成立，那末

$$f'(x)-\sigma_n^\alpha(x,f')=O\left(\frac{1}{(n+1)^\beta}\right).$$

証. 由定理 3，在定理的条件下，級数

$$-\sum_{k=1}^\infty k(a_k\sin kx-b_k\cos kx)$$

的 α 級第 n 蔡查罗平均，当 $n\to\infty$ 时，均匀地收斂，因此它是一連續函数的福里埃級数．它的逐項积分所得到的級数是 $f(x)$ 的福里埃級数，故当 $n\to\infty$ 时，$\sigma_n^\alpha(x,f')$ 均匀地收斂于 $f'(x)$．由是定理 2，均匀地成立着

$$\tilde{f}(x)-\tilde{\sigma}_n(x,f)=[L_n^\alpha]_1\cdot f'(x)+o\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\alpha}{n+1}f'(x)+o\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

故 $\alpha f'(x)=\varphi(x)$．由是定理的前半得証．至于定理的后半，只要应用定理 4 即可完成証明．

对于空間 $L^p(0,2\pi)$ $(1\leqslant p<\infty)$，我們有相应的定理，不贅述了．

5. 冪級数的蔡查罗求和

定理 11. 設 $f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_kz^k$ 是单位圓 $|z|<1$ 中的正則函数，它的 r 級导数 $|f^{(r)}(z)|\leqslant1$ $(|z|<1)$．設 $\alpha>0$, $\sigma_n^{(\alpha)}(z,f)=\sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha c_kz^k/A_n^\alpha$，那末当 $r=1$ 时

$$\sup_{|z|<1}|f(z)-\sigma_n^\alpha(z,f)|=O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

当 $r>1$ 时，

$$\sup_{|z|<1}\left|f(z)-\sigma_n^\alpha(z,f)-\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^{j-1}[L_n^\alpha]_j\cdot z^jf^{(j)}(z)\right|=O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right).$$

假如 $f^{(r)}(z)$ 在 $|z|\leqslant1$ 上是連續的，那末当 $r\geqslant1$ 时

$$\sup_{|z|<1}\left|f(z)-\sigma_n^\alpha(z,f)-\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}[L_n^\alpha]_j\cdot z^jf^{(j)}(z)\right|=O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\omega\left(\frac{1}{n+1},f^{(r)}\right)\right),$$

此地 $\omega(\delta, f^{(r)})$ 是函数 $f^{(r)}(e^{i\theta})$ 的連續模.

定理 12. 設 $f(z)$ 是单位圓 $|z|<1$ 中的正則函数, $\alpha>0$, 关系

$$\lim(n+1)\{f(z)-\sigma_n^\alpha(z,f)\}=\varphi(z)$$

在 $|z|<1$ 中均匀地成立, 此地 $\varphi(z)$ 是单位圓 $|z|<1$ 中的有界函数, 則函数 $f'(z)$ 在圓周 $|\zeta|=1$ 上有境界值 $f'(\zeta)$, 并且 $f'(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上是連續的, 还有 $\alpha z f'(z)=\varphi(z)$.

假如 $\alpha>\beta>0$, $\beta\leqslant 1$, 且在 $|z|<1$ 中均匀地成立着

$$f(z)-\sigma_n^\alpha(z,f)=\frac{\varphi(z)}{n+1}+O\left(\frac{1}{(n+1)^{1+\beta}}\right),$$

那末

$$f'(z)-\sigma_n^\alpha(z,f')=O\left(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}\right)$$

在 $|z|<1$ 中均匀地成立.

这些定理的証明类似于 § 4 的定理, 不贅述了. 同时也可以把它們拓广到 H_p $(p\geqslant 1)$ 中[14].

参 考 文 献

[1] Alexits, G., Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommers de Fejér. *Acta Math. Hung.*, **3** (1952), 29—42.

[2] Favard, J., Sur la saturation des procédés de sommation. *Journ. Liouville, Neuvième série*, **36** (1957), 359—372.

[3] Стечкин, С. Б., Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **17** (1953), 461—472.

[4] Покало, А. К., К вопросу суммирования функций классов $B^{(r)}$. *ДАН СССР*, **116** (1957), 750—753.

[5] Zygmund, A., On the degree of approximation of functions by Fejér means. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 274—278.

[6] Hardy, G.-Littlewood, J. E., Some properties of fractional integrals, I. *Math. Z.*, **27** (1928), 565—606.

[7] Zygmund, A., *Trigonometrical series*, New York (1952).

[8] 陈建功: 具有极光滑的境界曲綫之区域上的解析函数用它的法巴級数之棊查罗平均数均匀地来迫近它. 复旦学报(自然科学), 2 (1956), 89—124.

[9] Колмогоров, А. Н., Zur Grössenordung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. *Ann. of Math.*, **36** (1935), 521—526.

[10] Никольский, С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами. *Труды матем. ин-та им. Стеклова*, **15** (1945).

[11] Тиман, А. Ф., Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **17** (1953), 99—134.

[12] Никольский, С. М., Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднием. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **10** (1946), 207—256.

[13] Натансон, И. П., *Конструктивная теория функций*, М.—Л., 1949.

[14] Привалов, И. И., *Граничные свойства аналитических функций* М.—Л., 1950.

[15] Ахиезер, Н. И., *Лекций по теории аппроксимации*, М.—Л., 1947.

МЕТОД СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

Ли Сюнь-цзинь

(*Математический институт шанхая; Университет Фу-Дань*)

Резюме

Пусть α—вещественное число, $\alpha \neq -1, -2, \cdots$, и E является пространством Банаха. Норма $u \in E$ обозначается через $\|u\|$. Пусть $u_i \in E$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$, рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i \tag{U}$$

Положим

$$\sigma_n^\alpha(U) = \frac{1}{A_n^\alpha} S_n^\alpha(U),$$

где

$$S_n^\alpha(U) = \sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^\alpha u_i,$$

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}.$$

Ряд (U) мы будем называть (C, α)—суммируемым к элементу u, если

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha(U) = u.$$

Наряду с рядом (U), рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, u_i \tag{T}$$

и его (C, α)—средние

$$\sigma_n^\alpha(T) = \sum_{i=1}^{n} A_{n-i}^\alpha\, i u_i / A_n^\alpha.$$

G. Alexits[1] докозал следующую теорему: если $\alpha = 1$, то, для того чтобы имело место равенство

$$\|u - \sigma_n^\alpha(U)\| = O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\|\sigma_n^\alpha(T)\| = O(1).$$

J. Favard[2] обобщил результат Alexits'а на случай $\alpha = k$, где k——произвольное натуральное число.

В этой статье, мы доказываем следующие равенства:

$$\sigma_n^\alpha(T) = -\frac{\alpha+1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{n} A_i^\alpha [\sigma_i^\alpha(U) - u] + (\alpha+1+n)[\sigma_n^\alpha(U) - u],$$

$$\sigma_n^\alpha(U) = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)} \sigma_i^\alpha(T) + \frac{\sigma_n^\alpha(T)}{\alpha+n+1}$$

и теоремы:

Теорема 1. Если $\alpha > 0$, то, для того чтобы имело место равенство

$$\|u - \sigma_n^\alpha(U)\| = O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\|\sigma_n^\alpha(T)\| = O(1).$$

Теорема 2. Если $\alpha > 0, \lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots, \lambda_n \to 0, t \in E$ и

$$\|\sigma_n^\alpha(T) - t\| \leqslant \lambda_n$$

то $\sigma_n^\alpha(U)$ имеет предел $u \in E$, и

$$u - \sigma_n^\alpha(U) = \left\{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha+n+1}\right\} t + \frac{\alpha+3}{n+1}\theta_n \lambda_n,$$

где $\theta_n \in E$, $\|\theta_n\| \leqslant 1$.

Теорема 3. Пусть $\alpha > 0$, $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots$, $\lambda_n \to 0$, и u, t, $\eta_n \in E$, $\|\eta_n\| \leqslant 1$. Если

$$u - \sigma_n^\alpha(U) = \frac{\alpha}{n+1} t + \frac{\eta_n \lambda_n}{n+1},$$

то последовательность $\{\sigma_n^\alpha(T)\}$ имеет предел t.

Теорема 4. Если $\alpha > \beta > 0$, $\beta \leqslant 1$, u, $t \in E$ и

$$\left\| u - \sigma_n^\alpha(U) - \frac{\alpha}{n+1} t \right\| = O\left(\frac{1}{(n+1)^{1+\beta}}\right),$$

то

$$\|\sigma_n^\alpha(T) - t\| = O\left(\frac{1}{(n+1)^\beta}\right).$$

Пусть $\alpha > 0$, r—натуральное число, и числовая последовательность $A = \{a_i\}$—ограничена. Положим

$$[L_n^\alpha]_1(A) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha+1}{i(i+\alpha+1)} a_i - \frac{a_n}{\alpha+n+1},$$

$$[L_n^\alpha]_r(A) = [L_n^\alpha]_1([L_i^\alpha]_{r-1}(A)).$$

Когда $A = I = \{1\}$, $[L_n^\alpha]_r(I)$ обозначим через $[L_n^\alpha]_r$. Мы имеем

Теорема 5. Если $\alpha > 0$, $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots$, $\lambda_n \to 0$, l——натуральное число, и если

$$\sigma_n^\alpha(T) - t = \sum_{r=1}^{l} [L_n^\alpha]_r \cdot t_r + \eta_n \lambda_n \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

где $t, t_1, \cdots, t_l, \eta_n \in E$ и $\|\eta_n\| \leqslant 1$, то $\sigma_n^\alpha(U)$ имеет предел $u \in E$ и

$$u - \sigma_n^\alpha(U) = [L_n^\alpha]_1 \cdot t + \sum_{r=1}^{l} [L_n^\alpha]_{r+1} \cdot t_r + \frac{\alpha+3}{n+1}\theta_n \lambda_n,$$

где $\theta_n \in E$, $\|\theta_n\| \leqslant 1$.

На основании этих, мы рассмотриваем порядок приближения функций (C, α) средними рядов Фурье и степенных.

第10卷 第1期 数学学报 Vol. 10, No. 1
1960年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA March, 1960

整系数射影么模羣的自同构*

应玫茜
(中国科学院数学研究所)

§1. 序言

以 $\mathfrak{M}_n$ 表行列式之値为 ±1 的 $n\times n$ 整系数矩陣所組成的乘法羣，而以 $\mathfrak{M}_n^+$ 表 $\mathfrak{M}_n$ 中行列式之值为 +1 的矩陣所組成的子羣. $\mathfrak{M}_n$ 的中核由 $\{I, -I\}$ 所組成（I 是单位矩陣）. 以 $\mathfrak{P}_n$ 表 $\mathfrak{M}_n$ 对其中核的商羣，称之为 $\mathfrak{M}_n$ 的射影羣. 当 n 是偶数时，$\mathfrak{M}_n^+$ 的中核也是由 $\{I, -I\}$ 所組成，以 $\mathfrak{P}_n^+$ 表 $\mathfrak{M}_n^+$ 对其中核之商羣，称之为整系数射影模羣.

华罗庚教授和 I. Reiner 在 [1] 中决定了 $\mathfrak{P}_2^+$，及 $\mathfrak{P}_{2m}$ $(m\geqslant 1)$ 的自同构. 当 n 是奇数时，$\mathfrak{P}_n^+$ 即为 $\mathfrak{M}_n^+$，而 $\mathfrak{M}_n^+$ 的自同构已由万哲先先生所完全确定了[2]. 在本文中作者得到了：当 n 是 $\geqslant 6$ 的偶数时，$\mathfrak{P}_n^+$ 的自同构，以及当 $n=4$ 时，在某些条件下的自同构（詳見 §3）. 主要的定理可叙述如下：

定理. 設 n 是 $\geqslant 6$ 的偶数. 则由 $\mathfrak{P}_n^+$ 到它本身之上的映射

$$\overline{X}\to\overline{A}\overline{X}\overline{A}^{-1},\ \overline{A}\in\mathfrak{P}_n \tag{1}$$

及

$$\overline{X}\to\overline{A}\overline{X}'^{-1}\overline{A}^{-1},\ \overline{A}\in\mathfrak{P}_n \tag{2}$$

是 $\mathfrak{P}_n^+$ 的自同构；反之，$\mathfrak{P}_n^+$ 的一切自同构必为(1)或(2)之形状.

其中 $\overline{X}$ 是表 $\mathfrak{P}_n^+$ 中的元素 $\{X, -X\}$ $(X\in\mathfrak{M}_n)$. 显然，若 $X\in\mathfrak{M}_n^+$，则 $\overline{X}=\overline{-X}$.

定理的正面部分是显見的，主要的問題是証明反面部分的成立.

本文所采用的記号同于[1]与[2]，不再在此作一一說明.

設 $\overline{X}\in\mathfrak{P}_n^+$. 若 $\overline{X}^2=\overline{I}$，则 $\overline{X}$ 称为对合. 由 $\overline{X}^2=\overline{I}$ 知 $X^2=I$ 或 $X^2=-I$. 若 $X^2=I$，则 $\overline{X}$ 称之为第一类对合；若 $X^2=-I$，则 $\overline{X}$ 称之为第二类对合.

由[2]中引理1，我們知道，若 $\overline{X}$ 为第一类对合，则有 $A\in\mathfrak{M}_n^+$，使

$$AXA^{-1}=\underbrace{L\dotplus\cdots\dotplus L}_{x\text{项}}\dotplus(-I)^{(y)}\dotplus I^{(z)}=W(x,y,z),$$

其中 $L=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$，而 $2x+y+z=n$. 因此，第一类对合恆与一个 $\overline{W(x,y,z)}$ 在 $\mathfrak{P}_n^+$ 中相似.

不难驗証：$\overline{W(x,y,z)}$ 与 $\overline{W(x_1,y_1,z_1)}$ 在 $\mathfrak{P}_n^+$ 之下相似当且仅当 $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$ 或者 $x=x_1$, $y=z_1$, $z=y_1$.

因此，我們可以将 $\mathfrak{P}_n^+$ 中第一类对合全体分为一些共軛类，而 $\overline{W(x,y,z)}$, $2x+y+z=n$, $y\leqslant z$, 組成共軛元素类的一个完全代表系.

定义. $\mathfrak{P}_n^+$ 中与 $\overline{W(x,y,z)}$, $y\leqslant z$ 在 $\mathfrak{P}_n^+$ 之下相似的第一类对合称为 (x,y,z)-对合.

* 1959年10月5日收到.

特别，簡称$(0, y, z)$-对合为y-对合.

我們还需要継續研究第二类对合的分类問題. 为此，給出下述定理.

定理 1. 設$\overline{X}$为$\mathfrak{P}_n^+$中的第二类对合，則有$A \in \mathfrak{M}_n$，使

$$\overline{A}\overline{X}\overline{A}^{-1} = \underbrace{\overline{S} \dotplus \cdots \dotplus \overline{S}}_{\frac{n}{2}\text{項}},$$

其中$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

証. 对n施行归納法来証明本定理.

(1) $n = 2$. 設

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

由$X^2 = -I$，得$x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = -1$, $x_{12}x_{21} \neq 0$, $x_{11} + x_{22} = 0$. 分別討論$x_{11} \neq 0$及$x_{11} = 0$两种情况:

(i) $x_{11} = 0$，則$x_{12}x_{21} = -1$，故

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

或者

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) $x_{11} \neq 0$，則必存在模方陣P，使

$$PXP^{-1} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix},$$

其中$y_{11} \geqslant 0$, $y_{11} < |y_{12}|$, $y_{11} < |y_{21}|$. 由这性質以及$(PXP^{-1})^2 = -I$，可推出$y_{11} = 0$. 这就归到情况(i)中去了.

(2) $n \geqslant 4$. 設

$$X = (x_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

由$X^2 = -I$，知$(x_{12}, \cdots, x_{1n}) \neq (0, \cdots, 0)$. 于是存在$P \in \mathfrak{M}_{n-1}$，使

$$(x_{12}, \cdots, x_{1n})P = (y_{12}, 0, \cdots, 0), \ y_{12} \neq 0.$$

令

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix}^{-1} X \begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix},$$

則

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 \cdots 0 \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & * \\ y_{n1} & y_{n2} & \end{pmatrix}.$$

由$Y^2 = -I$，可得$y_{23} = 0$, $y_{24} = 0$, $\cdots$, $y_{2n} = 0$. 故可記

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 \\ y_{21} & y_{22} & \\ A_1 & & A_2 \end{pmatrix}.$$

因$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = -I$，故存在$P_1 \in \mathfrak{M}_2$，使$P_1 \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 又因$A_2^2 = -I$，由归

納法假定，存在 $Q \in \mathfrak{M}_{n-2}$，使

$$QA_2Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \cdots \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$Z = \begin{pmatrix} P_1 & \\ & Q \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} P_1 & \\ & Q \end{pmatrix}^{-1},$$

則

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ z_{31} & z_{32} & 0 & 1 & & \\ z_{41} & z_{42} & -1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ z_{n1} & z_{n2} & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 $Z^2 = -I$ 可得

$$\begin{cases} z_{32} = z_{41}, \\ z_{31} = -z_{42}, \end{cases} \ldots, \begin{cases} z_{n-1,2} = -z_{n1} \\ z_{n-1,1} = -z_{n2}. \end{cases}$$

令

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ -z_{32} & z_{31} & \\ 0 & 0 & \\ -z_{52} & z_{51} & I^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ -z_{n-1,2} & z_{n-1,1} & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

則易見

$$P_2ZP_2^{-1} = S \dot{+} \cdots \dot{+} S. \qquad \text{証毕.}$$

§2. $\mathfrak{P}_n^+$ 中的 2-对合

确定 $\mathfrak{P}_n^+$ 之自同构問題要依賴于 2-对合的特性．本节目的在于証明

定理． 設 n 是 $\geqslant 4$ 的偶数．則在 $\mathfrak{P}_n^+$ 的自同构之下，任意 2-对合映到 2-对合，或者第二类对合；而当 $n \geqslant 6$ 时，2-对合只能映到2-对合．

本定理之証明由下面所述之引理終結而得．

引理 1． 設 n 是 $\geqslant 4$ 的偶数． 若 2-对合在 $\mathfrak{P}_n^+$ 的自同构之下映到了 y-对合，則 $y = 2$．

証． 当 $n = 4$ 或 6 时，y-对合只有 $\bar{I}$ 与 2-对合．因此引理显然成立．

当 $n \geqslant 8$．設 $\bar{J}_1$ 与 $\bar{J}_2$ 为二个互相交换的 y-对合，$J_1J_2 = \pm J_2J_1$．当"－"号成立时，$y = \frac{n}{2}$，此时两两交换的 $\frac{n}{2}$-对合个数 $\geqslant \frac{1}{2} C^n_{n/2}$．当 $2 < y < \frac{n}{2}$ 时，两两交換的 y-对合个数有 C^n_y，而两两交换的 2-对合个数为 C^n_2．但是，当 $2 < y < \frac{n}{2}$ 时，

$$C_y^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-y+1)}{y!} > \frac{n(n-1)}{2!} = C_2^n,$$

而当 $y = \frac{n}{2}$ 时，

$$\frac{1}{2} C_{n/2}^n = \frac{n(n-1)\cdots\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}{2\cdot 2\cdots \frac{n}{2}} > \frac{n(n-1)}{2} = C_2^n.$$

因此，2-对合决不能映到 y-对合，除非 $y=2$.

引理 2. 設 n 是 $\geqslant 4$ 的偶数. 則在 $\mathfrak{P}_n^+$ 的自同构之下，2-对合决不能映到 $(x, 0, 0)$-对合.

証. 設 $\mathfrak{P}_n^+$ 的自同构将 2-对合映到了 $(x, 0, 0)$-对合. 我們分几种情况来討論.

(1) $n=4$. 設

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

則 $\bar{J}_1, \bar{J}_2$ 为可交换的 $(2, 0, 0)$-对合，其乘积为 2-对合. 因此，两两互相交换的相异的 $(2, 0, 0)$-对合之积至少属于一个不与 $(2, 0, 0)$-对合共軛的共軛元素类. 但是，两两互相交换的相异的 2-对合之积仍为 2-对合. 因此得到一个矛盾.

(2) $n=6$ 时之証明与(1)相仿，故略去.

(3) $n=8$. 設

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & -1 & -1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 \end{pmatrix};$$

則 $\bar{J}_1$ 与 $\bar{J}_2$ 为两个互相可交换的$(4, 0, 0)$-对合. 而 $\bar{J}_1\bar{J}_2$ 为$(2, 0, 4)$-对合. 再設

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & -1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

則 $\bar{J}_4$ 与 $\bar{J}_5$ 为两个互相交换的 $(4, 0, 0)$-对合，而 $\bar{J}_4\bar{J}_5$ 为 4-对合. 因此，两两互相交换的相异的$(4, 0, 0)$-对合至少属于二个不与 $(4, 0, 0)$-对合共軛的共軛元素类. 但是，两两互相交换的相异的 2-对合之积为 2-对合或 4-对合. 因此得到一个矛盾.

(4) $n \geqslant 12$. 設

$$J_1=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\1&&-1&\\&1&&-1\end{pmatrix}\dot{+}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\1&&-1&\\&1&&-1\end{pmatrix}\dot{+}L\dot{+}\cdots\dot{+}L,\ L=\begin{pmatrix}1&\\1&-1\end{pmatrix},$$

$$J_2=\begin{pmatrix}1&&&\\1&-1&&\\&&1&\\1&&-1&-1\end{pmatrix}\dot{+}\begin{pmatrix}1&&&\\1&-1&&\\&&1&\\1&&-1&-1\end{pmatrix}\dot{+}L\dot{+}\cdots\dot{+}L,$$

$$J_3=\begin{pmatrix}1&&&\\1&-1&&\\&&1&\\1&&-1&-1\end{pmatrix}\dot{+}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\1&&-1&\\&1&&-1\end{pmatrix}\dot{+}L\dot{+}\cdots\dot{+}L,$$

则 $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$ 分别为与 $\bar{J}_1$ 可交换的 $\left(\frac{n}{2},0,0\right)$-对合，$\bar{J}_1$ 也是 $\left(\frac{n}{2},0,0\right)$-对合. $\bar{J}_1\bar{J}_2$ 为 $(4,0,n-8)$-对合，而 $\bar{J}_1\bar{J}_3$ 为 $(2,0,n-4)$-对合. 因为 $n\geqslant 12$，故 $(4,0,n-8)$-对合与 $(2,0,n-4)$-对合均非 $\left(\frac{n}{2},0,0\right)$-对合. 因此两两互相交换的相异的 $\left(\frac{n}{2},0,0\right)$-对合之积至少属于二个不与 $\left(\frac{n}{2},0,0\right)$-对合共轭的共轭元素类. 但是，两两互相交换的相异的 2-对合之积为 2-对合或 4-对合. 故得矛盾. 因此引理成立.

引理 3. 在 $\mathfrak{P}_n^+$ 之自同构之下，2-对合决不能映到 (x,y,z)-对合，其中 $x\neq 0$，而 $y+z>0$.

證. 設 2-对合映到了 (x,y,z)-对合，$x\neq 0$, $y+z>0$. 我們分下面几种情况来討論.

(1) $y\geqslant 2$. 設

$$J_1=L_1\dot{+}\cdots\dot{+}L_{x-1}\dot{+}L_x\dot{+}(-I^{(y)})\dot{+}I^{(z)},\quad L_i=\begin{pmatrix}1&\\1&-1\end{pmatrix},$$

$$J_2=L_1\dot{+}\cdots\dot{+}L_{x-1}\dot{+}(-I^{(2)})\dot{+}L_x\dot{+}(-I^{(y-2)})\dot{+}I^{(z)},$$

$$J_3=L_1\dot{+}\cdots\dot{+}L_{x-1}\dot{+}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&1\\&&1\end{pmatrix}\dot{+}(-I^{(y-1)})\dot{+}I^{(z)},$$

则 $\bar{J}_2,\bar{J}_3$ 分别为与 $\bar{J}_1$ 可交换的 (x,y,z)-对合，$\bar{J}_1$ 也是 (x,y,z)-对合. $\bar{J}_1\bar{J}_2$ 为 $(2,0,n-4)$-对合，而 $\bar{J}_1\bar{J}_3$ 为 $(1,1,n-3)$-对合. 因为 $y\geqslant 2$，故 $(2,0,n-4)$-对合与 $(1,1,n-3)$-对合均非 (x,y,z)-对合. 因此，两两互相交换的相异的 (x,y,z)-对合 $(x\neq 0, y+z>0)$ 之积至少属于 2 个不与 (x,y,z)-对合共轭的共轭元素类. 故得矛盾.

(2) $y=1$. 此时显然有 $z\geqslant 1$. 設

$$J_1=L_1\dot{+}\cdots\dot{+}L_{x-1}\dot{+}L_x\dot{+}(-1)\dot{+}I^{(z)},$$

$$J_2=L_1\dot{+}\cdots\dot{+}L_{x-1}\dot{+}L_x\dot{+}(1)\dot{+}(-1)\dot{+}I^{(z-1)},$$

$$J_3=L_1\dot{+}\cdots\dot{+}L_{x-1}\dot{+}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&1\\&&1\end{pmatrix}\dot{+}I^{(z)},$$

则 $\bar{J}_2,\bar{J}_3$ 分别为与 $\bar{J}_1$ 可交换的 (x,y,z)-对合. $\bar{J}_1\bar{J}_2$ 为 2-对合，而 $\bar{J}_1\bar{J}_3$ 为 $(1,1,n-3)$-

对合．因此，若要引理在 $y=1$ 时成立，必須有 $z=n-3$, $x=1$．这时，

$$J_1 = L \dotplus (-1) \dotplus I^{(n-3)}.$$

我們又分二种情况来討論：

(2.1) $n=4$ 或 6． $\bar{J}_1\bar{J}_2$ 为 2-对合，故得矛盾．

(2.2) $n \geqslant 8$．又設

$$J_4 = I^{(2)} \dotplus (-1) \dotplus L \dotplus I^{(n-5)},$$

则 $\bar{J}_4$ 为与 $\bar{J}_1$ 交换且共軛的 (x, y, z)-对合． $\bar{J}_1\bar{J}_4$ 为 $(2, 0, n-4)$-对合． 但是 $\bar{J}_1\bar{J}_2$ 为 2-对合．故两两交换的相异的 $(1, 1, n-3)$-对合之积至少属于二个不同于 $(1,1,n-3)$-对合的共軛元素类．故得矛盾．

(3) $y=0$．这时 $z \geqslant 2$．設

$$J_1 = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \cdots \dotplus L_{x-1} \dotplus L_x \dotplus I^{(z)},$$

$$J_2 = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \cdots \dotplus L_{x-1} \dotplus I^{(2)} \dotplus L_x \dotplus I^{(z-2)},$$

$$J_3 = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \cdots \dotplus L_{x-1} \dotplus \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & -1 \end{pmatrix} \dotplus I^{(z-1)}.$$

则 $\bar{J}_2$, $\bar{J}_3$ 都为与 $\bar{J}_1$ 可交换的 $(x, 0, z)$-对合． $\bar{J}_1\bar{J}_2$ 为 $(2, 0, n-4)$-对合，而 $\bar{J}_1\bar{J}_3$ 为 $(1, 1, n-3)$-对合．故若引理成立必須 $x=2$, $z=n-4$．这时

$$J_1 = L_1 \dotplus L_2 \dotplus I^{(n-4)}.$$

因为 $n-4=z \geqslant 2$，故可另設

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ 1 & & & & -1 & \\ & & 1 & & & -1 \end{pmatrix} \dotplus I^{(n-6)},$$

则 $\bar{J}_4$ 也是与 $\bar{J}_1$ 可交换的 $(2, 0, n-4)$-对合，但是 $\bar{J}_1\bar{J}_4$ 为 $(2, 2, n-6)$-对合，故得矛盾．至此引理証毕．

引理 4. 設 n 是 $\geqslant 6$ 的偶数． 则在 $\mathfrak{P}_n^+$ 的自同构之下，2-对合决不能映到第二类对合．

証. 若在 $\mathfrak{P}_n^+$ 之自同构下，2-对合映到了第二类对合．分二种情况討論：

(1) $n=6$．設

$$J_1 = S \dotplus S \dotplus S, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = S \dotplus (-S) \dotplus (-S),$$

则 $\bar{J}_1$ 与 $\bar{J}_2$ 为互相可交换的第二类对合，其乘积 $\bar{J}_1\bar{J}_2$ 为 2-对合．故得矛盾．

(2) $n \geqslant 8$．設

$$J_1 = S \dotplus S \dotplus \cdots \dotplus S,$$

$$J_2 = (-S) \dotplus (-S) \dotplus S \dotplus \cdots \dotplus S,$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} s & \\ s & -s \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} s & \\ s & -s \end{pmatrix} \dotplus s \dotplus \cdots \dotplus s,$$

则 $\bar{J}_2$ 与 $\bar{J}_3$ 分别为与 $\bar{J}_1$ 可交换的第二类对合. $\bar{J}_1\bar{J}_2$ 为 4-对合，而 $\bar{J}_1\bar{J}_3$ 为 $(4, n-8, 0)$-对合. 故得矛盾. 引理証毕.

§3. $\mathfrak{P}_4^+$ 的自同构

本节的目的是証明：当 $n = 4$，若 $\mathfrak{P}_4^+$ 的自同构将2-对合映到 2-对合，则 $\mathfrak{P}_4^+$ 的自同构为 §1. 中(1)或(2)之形状.

設 $\bar{X} \to \bar{X}^\tau$ 是 $\mathfrak{P}_4^+$ 的一个自同构，则 τ 将

$$\bar{J}_1 = \overline{[-1, -1, 1, 1]}$$

映到 2-对合，設

$$\bar{J}_1^\tau = \bar{P}^{-1}\bar{J}_1\bar{P},$$

因此，在使 τ 承受内自同构后，可以假定 $\bar{J}_1^\tau = \bar{J}_1$.

命

$$\bar{J}_2 = \overline{[1, -1, -1, 1]},$$

$\bar{J}_2$ 是 2-对合，与 $\bar{J}_1$ 可交换，且 $J_1 J_2^\tau = J_2^\tau J_1$，故

$$J_2^\tau = \begin{pmatrix} a & b & & \\ c & d & & \\ & & e & f \\ & & g & h \end{pmatrix},$$

由 $[J_2^\tau]^2 = I$，可推得存在 $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_2$，使

$$\bar{J}_2^\tau = \overline{\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}}^{-1} \bar{J}_2 \overline{\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}}.$$

使 τ 承受一内自同构后，可假定 $\bar{J}_2^\tau = \bar{J}_2$（且 $\bar{J}_1$ 在这内自同构之下不变).

研究

$$\bar{S}_{12} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}.$$

因为 $\bar{S}_{12}$ 与 $\bar{J}_1$ 可交换，故 $S_{12}^\tau J_1 = \pm J_1 S_{12}^\tau$，式中"—"号情况不可能成立，不然 $S_{12}^\tau = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$.
由 $\bar{S}_{12}^2 = \bar{J}_1$，$[S_{12}^\tau]^2 = \pm J_1$，将得出一矛盾. 故

$$S_{12}^\tau = \begin{pmatrix} a & b & & \\ c & d & & \\ & & e & f \\ & & g & h \end{pmatrix}.$$

由 $[S_{12}^\tau]^2 = \pm J_1$，$[J_2 S_{12}^\tau]^2 = \pm I$，可得

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \mp I, \qquad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}^2 = \pm I;$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}^2 = \pm I, \begin{pmatrix} -e & -f \\ g & h \end{pmatrix}^2 = \pm I.$$

于是

$$\overline{S}_{12}^{\tau}=\begin{pmatrix}0&1&\\-1&0&\\&&I\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}0&-1&\\1&0&\\&&I\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}I&&\\&0&1\\&-1&0\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}I&&\\&0&-1\\&1&0\end{pmatrix}.$$

若第二种情况发生,则使 τ 承受自同构:

$$\overline{X}\to\begin{pmatrix}-1&\\&I^{(3)}\end{pmatrix}^{-1}\overline{X}^{\tau}\begin{pmatrix}-1&\\&I^{(3)}\end{pmatrix};$$

若第三种情况发生,则使 τ 承受自同构:

$$\overline{X}\to\begin{pmatrix}&I\\I&\end{pmatrix}^{-1}\overline{X}^{\tau}\begin{pmatrix}&I\\I&\end{pmatrix};$$

若第四种情况发生,则使 τ 承受自同构:

$$\overline{X}\to\begin{pmatrix}&&I\\-1&&\\&1&\end{pmatrix}^{-1}\overline{X}^{\tau}\begin{pmatrix}&&I\\-1&&\\&1&\end{pmatrix}.$$

以上这些自同构均使 $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$ 不变. 故不妨假定

$$\overline{S}_{12}^{\tau}=\overline{S}_{12}.$$

现在来考虑

$$\overline{S}_{23}=\begin{pmatrix}1&&&\\&0&1&\\&-1&0&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

因为 $S_{23}^{\tau}J_2=J_2S_{23}^{\tau}$, 故

$$S_{23}^{\tau}=\begin{pmatrix}a&&&b\\&e&f&\\&g&h&\\c&&&d\end{pmatrix}.$$

因为 $S_{23}^2=J_2$, $[J_1S_{23}]^2=I$, 可以推得

$$\overline{S}_{23}^{\tau}=\overline{S}_{23}\text{ 或 }\begin{pmatrix}1&&&\\&0&-1&\\&1&0&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

若第二种情况出现,则使 τ 承受自同构

$$\overline{X}\to\begin{pmatrix}I^{(2)}&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}\overline{X}^{\tau}\begin{pmatrix}I^{(2)}&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix},$$

这个自同构使 $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, $\overline{S}_{12}$ 不变,因此可假定

$$\overline{S}_{23}^{\tau}=\overline{S}_{23}.$$

同理,可以不妨假定 $\overline{S}_{34}^{\tau}=\overline{S}_{34}$, 而

$$S_{34}=\begin{pmatrix}I^{(2)}&&\\&0&1\\&-1&0\end{pmatrix}.$$

最后,我們来考虑

$$\overline{T}=\begin{pmatrix}1&1&\\&1&\\&&I^{(2)}\end{pmatrix}.$$

因为 $T^{\tau}J_1=J_1T^{\tau}$, 故

$$T^\tau = \begin{pmatrix} a & b & & \\ c & d & & \\ & & e & f \\ & & g & h \end{pmatrix},$$

但因 $T^\tau S_{14} = \pm S_{34} T^\tau$ 以及 $[S_{12} T^\tau]^3 = \pm I$，故 $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = I^{(2)}$ 或 $-I^{(2)}$，且

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}^3 = \pm I^{(2)}.$$

更由 $[S_{23} T]^4 = I$，$[S_{23} T^\tau]^4 = \pm I$，可推得

$$\overline{T}^\tau = \overline{T} \text{ 或 } \overline{\begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & I^{(2)} \end{pmatrix}}.$$

若第二种情形发生，则使 τ 承受自同构

$$\overline{X} \to \overline{X}^{\tau'^{-1}}.$$

因为这个自同构使 $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, $\overline{S}_{12}$, $\overline{S}_{23}$, $\overline{S}_{34}$ 均不变，故可假定 $\overline{T}^\tau = \overline{T}$.

因为 $\mathfrak{P}_4^+$ 的生成元为 $\overline{S}_{12}$, $\overline{S}_{23}$, $\overline{S}_{34}$ 和 $\overline{T}$，而自同构 τ 将这些生成元映到了它們本身，故 τ 为单位自同构．至此，本节开始所述之結果証明完毕．

§4. $\mathfrak{P}_n^+$ $(n \geqslant 6)$ 的自同构

本节的目的是証明：当 n 为 $\geqslant 6$ 的偶数时，$\mathfrak{P}_n^+$ 的自同构为 §1 中 (1) 或 (2) 之形状．

設 $\overline{X} \to \overline{X}^\tau$ 是 $\mathfrak{P}_n^+$ 的一个自同构．τ 将 $\mathfrak{P}_n^+$ 中的 2-对合映到 2-对合．令

$$J_{in} = [1, \cdots, \underset{\text{第 } i \text{ 个}}{1}, -1, 1, \cdots, 1, -1], \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

则 $\overline{J}_{in}$ 为两两交换之 2-对合，且任意二个之乘积为 2-对合．于是 $\overline{J}_{in}^\tau$ 为两两可交换之 2-对合．故有 $\overline{A} \in \mathfrak{P}_n$，使

$$\overline{J}_{in}^\tau = \overline{A}\overline{J}_{in}\overline{A}^{-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

使 τ 承受一內自同构后，不妨可設

$$\overline{J}_{in}^\tau = \overline{J}_{in}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

設 $\overline{X}$ 为 $\mathfrak{P}_n^+$ 中与 $\overline{J}_{n-2,n-1}$, $\overline{J}_{n-1,n}$ 交換之元素，故 $X J_{n-2,n-1} = \pm J_{n-2,n-1} X$, $X J_{n-1,n} = \pm J_{n-1,n} X$．两式中不能同时取"－"号，或者一个取"－"号，一个取"＋"号．否則所得之 $\overline{X}$ 为奇异的．因此，

$$\overline{X} = \overline{\begin{pmatrix} A^{(n-3)} & \\ & \pm I^{(3)} \end{pmatrix}}, \quad A^{(n-3)} \in \mathfrak{M}_{n-3}.$$

这种 $\overline{X}$ 的平方生成一羣 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{P}_{n-3}^+$ 同构，而 $\mathfrak{g}_1$ 中的元素为

$$\overline{\begin{pmatrix} A^{(n-3)} & \\ & I^{(3)} \end{pmatrix}}, \quad A^{(n-3)} \in \mathfrak{M}_{n-3}^+$$

所組成．

同理，$\mathfrak{P}_n^+$ 中与 $\overline{J}_{1n}$, $\overline{J}_{2n}$ 交換的元素的平方生成一羣 $\mathfrak{g}_2$ 与 $\mathfrak{P}_{n-3}^+$ 同构，而 $\mathfrak{g}_2$ 为形如

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & B^{(n-3)} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}, \quad B^{(n-3)} \in \mathfrak{M}_{n-3}^+$$

之元素所組成．$\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 生成一羣 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{P}_{n-1}^+$ 同构，$\mathfrak{g}$ 中之元素为

$$\begin{pmatrix} \overline{X_1^{(n-1)}} & \\ & 1 \end{pmatrix}, \ X_1^{(n-1)} \in \mathfrak{M}_{n-1}^+.$$

因为 $\bar{J}_{in}^{\tau} = \bar{J}_{in}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, 故 $\mathfrak{g}_1^{\tau} = \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2^{\tau} = \mathfrak{g}_2$, 因此 $\mathfrak{g}^{\tau} = \mathfrak{g}$. 这样, τ 誘导出 $\mathfrak{P}_{n-1}^+$ 上的自同构 τ_1:

$$\begin{pmatrix} \overline{X_1} & \\ & 1 \end{pmatrix}^{\tau} = \begin{pmatrix} \overline{X_1^{\tau_1}} & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

由归納法假定,有 $\bar{A}_1 \in \mathfrak{P}_{n-1}$, 使

$$\bar{X}_1^{\tau_1} = \bar{A}_1 \bar{X}_1 \bar{A}_1^{-1}, \text{ 对一切 } \bar{X}_1 \in \mathfrak{P}_{n-1}^+,$$

或

$$\bar{X}_1^{\tau_1} = \bar{A}_1 \bar{X}_1'^{-1} \bar{A}_1^{-1}, \text{ 对一切 } \bar{X}_1 \in \mathfrak{P}_{n-1}^+.$$

令 $\bar{J}_{ik} = \bar{J}_{in}\bar{J}_{kn}$ $(1 \leqslant i < k \leqslant n-1)$, 則 $\bar{J}_{ik}^{\tau} = \bar{J}_{ik}$ $(1 \leqslant i < k \leqslant n-1)$, 因此 $\bar{A}_1$ 是对角形矩陣;故使 τ 承受自同构

$$\bar{X} \to \begin{pmatrix} \overline{A_1^{-1}} & \\ & 1 \end{pmatrix} \bar{X} \begin{pmatrix} \overline{A_1^{-1}} & \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

或

$$\bar{X} \to \left[\begin{pmatrix} \overline{A_1^{-1}} & \\ & 1 \end{pmatrix} \bar{X} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right]'^{-1}$$

后,可以假定

$$\begin{pmatrix} \overline{X_1} & \\ & 1 \end{pmatrix}^{\tau} = \begin{pmatrix} \overline{X_1} & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

(因为这二种自同构均使 $\bar{J}_{in}$ 不变.)

再令

$$S_{n-1,n} = I^{(n-2)} \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_{n-2,n-1} = I^{(n-3)} \dot{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{+} (1).$$

則 $\bar{S}_{n-2,n-1}^{\tau} = \bar{S}_{n-2,n-1}$. 又因 $S_{n-1,n}^{\tau} J_{ik} = J_{ik} S_{n-1,n}^{\tau}$ $(1 \leqslant i < k \leqslant n-2)$ 以及 $[S_{n-1,n}^{\tau}]^2 = \pm J_{n-1,n}$, $[S_{n-1,n}^{\tau} S_{n-2,n-1}]^3 = \pm I$, 可以推出

$$\bar{S}_{n-1,n}^{\tau} = \bar{S}_{n-1,n} \text{ 或 } \overline{\begin{pmatrix} I^{(n-3)} & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

若第二种情形出現,則使 τ 承受自同构

$$\bar{X} \to \overline{[1, \cdots, 1, -1]}\, \bar{X}\, \overline{[1, \cdots, 1, -1]}^{-1}$$

后, 可以假定 $\bar{S}_{n-1,n}^{\tau} = \bar{S}_{n-1,n}$ (因为这自同构使 $\mathfrak{g}$ 中每个元素不变.) 因为 $\mathfrak{P}_n^+$ 由 $\mathfrak{g}$ 及 $\bar{S}_{n-1,n}$ 所生成. 故 $\bar{X}^{\tau} = \bar{X}$, 对所有 $\bar{X} \in \mathfrak{P}_n^+$. 这就証明了本节开始所述之結果.

参 考 文 献

[1] Hua, L. K. and Reiner, I., "Automorphisms of the projective unimodular group". *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952).

[2] 万哲先:"整系数模羣的自同构", 数学进展, **3** (1957), 216—233.

AUTOMORPHISMS OF THE PROJECTIVE UNIMODULAR GROUP

YING MEI-CHIE
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Let $\mathfrak{M}_n$ be the group of all $n \times n$ integral matrices of determinant ± 1 and let $\mathfrak{M}_n^+$ be the subgroup of $\mathfrak{M}_n$ consisting of all matrices with determinant $+1$. Let $\mathfrak{P}_n$ be the factor-group of $\mathfrak{M}_n$ by its centrum, and let $\mathfrak{P}_n^+$ be the factor-group of $\mathfrak{M}_n^+$ by its centrum. In [1] L. K. Hua and I. Reiner determined the group of automorphisms of $\mathfrak{P}_2^+$ and $\mathfrak{P}_{2m}$ $(m \geqslant 1)$. In [2] Wan Cheh-Hsian determined the group of automorphisms of $\mathfrak{P}_n^+$ for odd n. In the present paper the author have proved the following result.

Theorem. Let n be even, $n \geqslant 6$. Then the mappings

$$\overline{X} \to \overline{A}\overline{X}\overline{A}^{-1}, \overline{A} \in \mathfrak{P}_n \tag{1}$$

and

$$\overline{X} \to \overline{A}\overline{X}'^{-1}\overline{A}^{-1}, \overline{A} \in \mathfrak{P}_n \tag{2}$$

from $\mathfrak{P}_n^+$ onto itself are autormorphisms of $\mathfrak{P}_n^+$; and conversely, the automorphisms of $\mathfrak{P}_n^+$ are either of the form (1) or of the form (2).

第10卷 第1期　　数 学 学 报　　Vol. 10, No. 1
1960 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1960

递 归 算 法*

遞归算法論 I

胡 世 華
(中国科学院数学研究所)

§1. 引 言

能行性問題,也就是算法問題或可計算性問題,是数理邏輯的中心問題. 这問題在数理邏輯基本理論研究中的重要性是数理邏輯工作者所熟知的. 然而,它的重要性是远远地超出数理邏輯的范围的.

能行性問題涉及一般数学的极为本質的問題,而且牽涉得十分深广. 以递归函数論的語言来說,所有数学定理的証明都可以归結为某一递归函数 f 的求解問題,即

(1) $$f(x) = 0$$

在自然数范围內是否有解,以至如何求解的問題. 又,如所周知,从 Gödel, Church 开始的关于算法不可能性的一系列的結果指出了数学中的一些潛在的絕境,从而使数学工作者有可能防止陷入这些絕境中去.

在本世紀四十年代之后,能行性理論又在計算机、自动机、邏輯网絡、程序理論中有了广泛、重要的应用.

为了奠定这种研究的基础,到現在为止有不少数理邏輯学者已經建立起若干个在一定意义上互相等价的理論,重要的有 Skolem-Gödel-Herbrand-Kleene[1—4]的递归函数理論,Church 的 λ-轉換演算[5],Turing 与 Post 的計算机理論[6, 7],Марков 的正規算法[8, 9]等. 各个理論是从不同的角度或不同的要求来反映能行或計算的特征和規律的.

已有的各个能行性理論各有其优、缺点.

过去在数学中經常使用"計算"这一名詞,然而沒有对"計算"概念予以精确的数学定义. 例如有这样一个函数

(2) $$f(x) = 3x^2 + x,$$

通常我們認为它是可計算的. 我們令

$$g(x, y) = x \cdot y,$$
$$h(x, y) = x + y,$$

則(2)可写作

(3) $$f(x) = h(g(3, g(x, x)), x).$$

我們現在要算 $f(2)$ 的值. 通常怎样算呢? 先把 2 代入(3)中的 x,得

(4) $$f(2) = h(g(3, g(2, 2)), 2).$$

* 1959 年 11 月 16 日收到.

由

(5) $$g(2, 2) = 4,$$

故可由(4)把其中有形式 $g(2, 2)$ 的部分替之以 4 得

(6) $$f(2) = h(g(3, 4), 2).$$

再由

$$g(3, 4) = 12$$

及(6)得

(7) $$f(2) = h(12, 2).$$

再由

$$h(12, 2) = 14$$

及(7)得

$$f(2) = 14,$$

即得所要的結果. 从一般递归函数的定义(見[10]),就可以看出,"一般递归函数"概念就是从日常习慣的这种最簡单的計算过程經过数学的抽象化、精确化而得的. 正因为这样,递归函数論中的基本概念是比較容易为数学工作者所掌握;就是从教学的观点上看,通过递归函数来处理能行性問題也是比較容易为学习者所接受的. 这可以算是递归函数論的优点之一.除此之外它还有不少优点.例如,那些最常用的自然界的函数,如 $x + y$, $x \cdot y$, x^y, $x!$, $\binom{x}{y}$ 等,它們都是递归函数. 在递归函数論中,可以非常直接地,几乎就是从函数的定义中直接看出它們确是递归函数,而无需經过多少步驟. 再有,以递归函数来体現自然数的可計算函数,几乎只要把直觉地处理的方法加以精确化,就可以得到相应的递归函数与这些函数的严格定义. 递归函数論也是一个結构比較簡化,很"干淨"的数学理論.

可是递归函数論也有它的缺点.

它是一个关于自然数的理論,可是計算是不能仅限于自然数的. 其实,計算是对于公式来进行的. 对于自然数的計算,严格地說,也必須回到对于某种公式的計算,如象

$$0,\ 0',\ 0'',\ 0''',\ \cdots$$

这样的公式的計算.通常我們說一个代数多項式的微分是可以計算的,这里的計算其实就是对于表示多項式的公式的計算. 又如我們說某一語言中某一类句子到另一語言的翻譯是可以計算的,这又是对于某一类公式(句子)的計算. 自然,对于公式的計算也可以在关于自然数的递归函数理論中加以表达,可是这就要通过,例如 Gödel 的配数法,把公式加以編碼,把对于公式的語言轉換成对于自然数的語言. 显然这就要多費一道手續,而不是直接地处理公式了.

象图林机器理論, Марков 的关于正規算法的理論都是直接地对于公式的理論,这两个理論在这一点上都优于递归函数理論. 除此之外,它們还有别的优点.

图林机器理論中的"計算机"概念反映了我們通常直觉中的計算机与机械性.

Марков 的"正規算法"概念,作为一个关于能行性的数学概念来說,它是再簡洁不过的了. 这个概念的定义在邏輯上是如此之簡单、明确、純化,甚至可以說是美丽的. 作者第一次見到这一概念的定义时是很为它的簡洁叹服, Марков 把"計算"概念加工得如此

之一尘不染，几乎可以說达到透明的程度．作为一个純数学概念来說，它比各种概念都好．

然图林的計算机理論有它的缺点．以图林机器来处理象通常熟悉的函数的計算就显得很曲折，很不簡单；在习惯中很簡单的东西在图林机器理論中往往显得很复杂．

Марков 的算法論也有类似情况．

再如 Church 的 λ-变換演算，自然是在能行性理論中很重要的系統，也有其固有的优缺点．其他能行性理論也有类似的情况，我們不在这里多說．

已經証明，所有这些理論都是互相等价的；因之，所有各理論的成果都可以在任何其他的理論中加以陈述，因此，可以把所有的理論、結果都統一于这些理論中的任一个之中．然而，在我們处理实际的与理論的問題时，却仍有用其中某一理論更为方便的問題．看起来，似乎每一个理論都尙不能单独满足一切需要．

我們觉得，情况并不完全是这样．我們可以建立一个能行性的理論（自然它也必須与上述各理論都是等价的），它有上述各理論的优点而沒有或少有所涉及的那些缺点．本文所提出的递归算法論就希望是这样一个理論．递归算法論是自然数的递归函数論在字集上的推广．可以看出，它有以下的优点．

1. 在递归算法論中日常理解的計算可以直接地得到反映，它与数学常識中的內容接近，具有递归函数論的优点．

2. 它是处理公式的．

3. 各种已有的能行性理論可以很自然而直接地作为子理論在其中得到表达，而且不失其原来理論的特点，包括各个理論中所发展出的技巧．可以說，递归算法論比較有机地把各理論統一于自己．

4. 在发展这个理論之始，不要經过多少准备步驟，就可以很直接地达到所处理的問題，直观性高．从教学观点看，这个理論也是好的．

递归算法論还有一些其他的特点，在把这个理論作一定程度的发展之后就可以更加清楚．

以下我們先引进递归算法論中的主要概念，如"递归算法"，"递归函数"，"递归謂詞"（§2），"递归算子"等（§3）；进一步我們引进"递归算法的发展"，"递归函数的发展"等概念（§4），这些概念不是递归算法論中所經常要用到的，然通过它們我們說明递归算法論可以向不同方向去发展，并对递归算法論处理問題的初步方法作一些直观的說明；接着我們討論如何在递归算法論中发展 Марков 的正規算法理論（§5）、图林机器理論（§6）及自然数的递归函数論（§7）．

本文中所用到的直觉語言中的命題連接詞及量詞，于需要符号化时，采用如下的写法（相应的 →，∧，∨，¬，∀，∃ 等符号将来会被用作形式符号）：

$\cdots \Longrightarrow \cdots$	如果…則…
$\cdots \wedge \cdots$	…与…
$\cdots \vee \cdots$	…或…
$\neg \cdots$	非…
$(\forall x) \cdots$	凡 x，…

$(\exists x)\cdots$　　　　　有 $x, \cdots$.

并分别以 $(\forall x_1, \cdots, x_n)$，$(\exists x_1, \cdots, x_n)$ 表示 $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)$，$(\exists x_1)\cdots(\exists x_n)$.

§2. 递归算法，递归函数

我們所要討論的东西，都要涉及这样一种代数結构 $\mathfrak{A}$. 对于 $\mathfrak{A}$ 有一个运算，以 xy 来表示，我們可以称 xy 为 x 与 y 的**連接**. $\mathfrak{A}$ 滿足以下五个条件：

1. $\mathfrak{A}$ 对于連接运算是封閉的，卽，任何 x, y，如果 $x, y \in \mathfrak{A}$，則 $xy \in \mathfrak{A}$；

2. $\mathfrak{A}$ 中有一元，記作 $\odot$，对于任何 $x \in \mathfrak{A}$，恆有

$$\odot x = x\odot = x;$$

3. 連接运算滿足組合律，卽，$x(yz) = (xy)z$[1]；

4. 有一个 $\mathfrak{A}$ 的有穷不空子集 $\mathscr{A}$，$\odot$ 不属于其中；任何 $x \in \mathfrak{A}$，有 $\mathscr{A}$ 元的唯一分解，卽，有 $x_1, \cdots, x_n \in \mathscr{A}$，使

$$x = x_1 \cdots x_n,$$

而且，任何 $y_1, \cdots, y_m \in \mathscr{A}$，而

$$x = y_1 \cdots y_m.$$

則必 $n = m,\ x_i = y_i,\ i = 1, \cdots, n$；

5. $\mathfrak{A}$ 滿足左右消去律，卽設 $x, y, z \in \mathfrak{A}$，恆有

　如果 $xy = xz$，則 $y = z$；

　如果 $xz = yz$，則 $x = y$.

代数学者称这样一个 $\mathfrak{A}$ 为一个以 $\mathscr{A}$ 为有穷自由基的自由半羣. 一个有有穷自由基的自由半羣正好是由有穷个符号构成的公式系統的代数抽象，所以，在数理邏輯里往往称这样一个 $\mathfrak{A}$ 的自由基 $\mathscr{A}$ 中的元为符号，$\mathfrak{A}$ 中的元为公式，也称 $\mathfrak{A}$ 为一符号系統；現在我們也习慣于称 $\mathscr{A}$ 为字母表，$\mathscr{A}$ 中的元为字母，$\mathfrak{A}$ 中的元为字，$\odot$ 为空字. 由于 $\mathfrak{A}$ 是完全由 $\mathscr{A}$ 所确定的，所以此后不再需要提到 $\mathfrak{A}$. 例如，如果要說"以 $\mathscr{A}$ 为字母表的 $\mathfrak{A}$ 中的字"，卽可簡单地說"$\mathscr{A}$ 中的字"，不会引起誤会.

递归算法論卽是把通常的递归函数論由自然数推广到这样一个 $\mathfrak{A}$ 的理論. 以下我們将仿 Kleene[10] 以定义"$\mathscr{A}$ 中的递归算法"，"$\mathscr{A}$ 中的递归函数"[2].

我們取一个字母表 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}_1$ 的眞子集，如习慣[9]，我們称 $\mathscr{A}_1$ 是一个 $\mathscr{A}$ 的扩大的字母表. $\mathscr{A}_1$ 比 $\mathscr{A}$ 多以下三种字母：第一种称为**函数字母**，每一个函数字母都可以規定为一 $n(n \geqslant 0)$ 元的函数字母. 下面我們用 f, g, h, f_1, $\cdots$ 等作为这种函数字母. 第二种称为**变元字母**，自然，它們不是 $\mathscr{A}$ 中的字母，也不是函数字母. 下面我們用 x, y, z, x_1, $\cdots$ 等作为变元字母. 第三种，包括四个字母，可假定它們被写作

$$\langle \qquad \rangle \qquad , \qquad =$$

它們可以順序地称为**左括号**，**右括号**，**逗点**，**等号**，自然它們是异于 $\mathscr{A}$ 中字母及前两种字母的.

---

1) 此后，可如习慣那样省去括号.

2) 更恰当的名詞是"以 $\mathscr{A}$ 为字母表的字集 $\mathfrak{A}$ 中的递归算法"，"在以 $\mathscr{A}$ 为字母表的字集 $\mathfrak{A}$ 中定义的递归函数". 正象說"$\mathscr{A}$ 中的字"一样，这样，可以簡单些，可以不涉及 $\mathfrak{A}$.

現在我們来定义"項"与"(形式)等式". $\mathscr{A}$ 中的字与变元字母是項;如果 a, b 是項,則 ab 是項;如果 f 是一 n 元函数字母,$a_1, \cdots, a_n$ 是項,則 $f\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 是項;只有这些是項. 等式是具有形式 $a=b$ 的 $\mathscr{A}_1$ 中的字,其中 a, b 都是項. 这里的等式是 $\mathscr{A}_1$ 中的字,不是我們行文中用的"等式",不是我們直觉語言中的用語(例如本节开始时講半羣的条件第3条中的"$x(yz)=(xy)z$",这是一等式,然不是我們这里的形式等式). 为了免去混淆,在需要时我們称这种等式为形式等式.

以下我們要定义两条規則,称为 $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$.

$\mathbf{R}_1$ 設 e_1 是一个等式,变元字母 x 在 e_1 中出現,又設 a 是一 $\mathscr{A}$ 中的字. 把 e_1 中的各个 x 的出現一律替換为 a,經过这样替換之后得到一个等式 e_2. 我們称 e_1 經 $\mathbf{R}_1$ 得 e_2,也称由 e_1 經代入得 e_2,也称由 e_1 經把字 a 代入其中的变元字母 x 得 e_2.

$\mathbf{R}_2$ 設等式 e_1 中沒有变元字母出現,e_2 是

$$h\langle c_1, \cdots, c_n\rangle = c,$$

其中 h 是一 n 元函数字母,$c_1, \cdots, c_n$, c 都是 $\mathscr{A}$ 中的字,又設 e_3 是从 e_1 把在其中等号右边出現的一个或若干个有形式 $h\langle c_1, \cdots, c_n\rangle$ 的部分替換以 c 而得. 我們称 e_1, e_2 經 $\mathbf{R}_2$ 得 e_3,也称 e_3 是由 e_1, e_2 經等价替換而得,e_1 称为大前提,e_2 称为小前提.

現在我們来定义遞归算法論中的重要概念"計算","遞归算法".

設 Γ 是一个等式的有窮序列,这序列的最末一个等式的第一个字母是一个 n 元的函数字母 f. 我們称这 f 为 Γ 的主函数字母. 設

(1) $$e_1, \cdots, e_r$$

是一滿足以下条件的等式的序列,其中每一个 e_i 或者是 Γ 的一項,或者是由(1)中在其前面的 $e_j (j<i)$ 經 $\mathbf{R}_1$ 而得,或者是由(1)中在其前面的 e_j, e_k $(j, k<i)$ 經 $\mathbf{R}_2$ 而得,又 e_r 有以下形式

(2) $$f\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = a,$$

其中 $a_1, \cdots, a_n$, a 都是 $\mathscr{A}$ 中的字. 这样,我們称(1)为一个計算,或一个 Γ 中的計算,特別是一个根据 Γ 对 $f\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 的計算,而 a 称为这計算的結果. 如果存在着这样一个(1),其末一項为(2),則可采用 Kleene 的写法,記作

$$\Gamma \vdash f\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = a,$$

我們也称 $f\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = a$ 可以从 Γ 推出. 設 Γ 具有这样的性質:对于任何 $\mathscr{A}$ 中的字 $a_1, \cdots, a_n$,如果有一个据 Γ 对 $f\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 的計算的話,計算的結果就是唯一确定的;换言之,如果

$$\Gamma \vdash f\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = b,$$

則 b 即 a,也就是說对 $f\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 如果算得出結果来,結果是不能两样的. 則我們称这样一个等式序列 Γ 連同推理規則 $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ 为一 $\mathscr{A}$ 中的遞归算法.

現在我們来定义遞归算法論中的主要概念"遞归函数".

設

$$f(x_1, \cdots, x_n) = y$$

是一个在 $\mathscr{A}$ 中的字集的子集(眞子集或者非眞子集)上有定义的 n 元函数,函数值 y 也是 $\mathscr{A}$ 中的字. 設有一等式的有窮序列 Γ,Γ 的主函数字母为 f,f 还是一 n 元的函数字

母．設对于任意的 $\mathscr{A}$ 中的字 $a_1, \cdots, a_n, a$，如果 $f(a_1, \cdots, a_n)$ 有定义，则

$$f(a_1, \cdots, a_n) = a \tag{3}$$

成立，其必要与充分条件是

$$\Gamma \vdash \mathrm{f}\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = a \tag{4}$$

成立．对于字 $a_1, \cdots, a_n$，$f(a_1, \cdots, a_n)$ 可以是沒有定义的，在这情况下对于任何 $\mathscr{A}$ 中的字 b，

$$\Gamma \vdash \mathrm{f}\langle a_1, \cdots, a_n\rangle = b$$

都不成立．这样的函数 f 称为一个 $\mathscr{A}$ 中的递归函数，并說 Γ 定义 f．我們还說，Γ 中的 f 表示了函数 f，这卽是說，f 是 Γ 中的主函数字母，并且 Γ 定义 f．

我們所講到的函数，如一般的假定，都是单值的函数；卽，当 $x_1, \cdots, x_n$ 給定，则 $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ 就唯一确定了．由于(3)的必要与充分条件是(4)，故对 $a_1, \cdots, a_n$ 来說若有一 a 使(4)成立，则这 a 必定是唯一的．因之，如果有穷的等式序列 Γ 定义 f，则 Γ 必是一递归算法．

我們以 $\mathfrak{R}$ 表示包括所有递归函数的集，自然，这里"所有递归函数"指的是所有 $\mathscr{A}$ 中的递归函数．如果需要特别說明是 $\mathscr{A}$ 中的递归函数，或者有其他需要时可以把 $\mathfrak{R}$ 写作 $\mathfrak{R}(\mathscr{A})$．$\mathfrak{R}$ 很自然地分解成两个沒有公共部分的子集，記作 $\mathfrak{R}^0$ 与 $\mathfrak{R}^1$，有

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^0 \smile \mathfrak{R}^1$$

或

$$\mathfrak{R}(\mathscr{A}) = \mathfrak{R}^0(\mathscr{A}) \smile \mathfrak{R}^1(\mathscr{A})$$

$\mathfrak{R}^0$ 与 $\mathfrak{R}^1$ 是这样两个子集：f 可以在 $\mathscr{A}$ 中的任何字 $a_1, \cdots, a_n$ 上都有定义，这样的 f 我們归之于 $\mathfrak{R}^0$；当 $f \in \mathfrak{R}^0$ 时，称 f 为一 $\mathscr{A}$ 中的递归全函数．如果 f 在 $\mathscr{A}$ 中的某些字 $a_1, \cdots, a_n$ 上沒有定义，这就是說 f 只是在 $\mathscr{A}$ 的字集的一个眞子集上有定义，我們把这样的递归函数 f 归之于 $\mathfrak{R}^1$；当 $f \in \mathfrak{R}^1$ 时，称 f 为一 $\mathscr{A}$ 中的递归偏函数．因之，一个 $\mathscr{A}$ 中的递归函数 f，总是一个递归全函数或递归偏函数，二者不可得兼．

如数理邏輯学者所习知，在自然数的递归函数論中有"一般递归函数"，"部分递归函数"两名詞．一般递归函数反而是部分递归函数的特例，一般递归函数集是部分递归函数集的眞子集．从"顾名思义"的角度看，这样使用名詞是不好的．可是，这些名詞已經是使用得頗为习惯的了．在这里我們无意要大家来改变这种名詞的使用．但在本文中我們打算不用"一般递归"，"部分递归"这样一些名詞，而将采用如上面所定义的那些名詞．两类名詞之間的相当的关系如下：

一般递归函数……………………………………递归全函数
部分递归函数(非一般递归函数)……………递归偏函数
部分递归函数(其中包括一般递归函数)……递归函数．

我們可以象定义"自然数的递归謂詞"那样来定义递归謂詞．

設 $x_1, \cdots, x_n$ 之間有 R 关系，表作 $R(x_1, \cdots, x_n)$，亦称 R 为一 n 元謂詞，或 n 目謂詞．又設有一 n 元的 $\mathscr{A}$ 中的递归函数 f，使

$$R(x_1, \cdots, x_n) \Longleftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = \odot \tag{5}$$

成立．我們称 R 为一 $\mathscr{A}$ 中的递归謂詞．称 f 为 R 的表示函数．在定义递归謂詞时(5)中

的⊙换之以任何一个固定的字也是可以的.

§3. 擬邏輯詞項与递归算子

我們来举一些递归函数,递归謂詞的例子,这些例子都是要常常用到的.

1. 設 $\mathscr{A}$ 給定, $\mathscr{A}$ 中的字的連接,即

$$(0)\qquad f(x, y) = xy,$$

就是一个二元的递归全函数. 假如 Γ 中包含一个唯一的形式等式

$$\mathfrak{f}\langle x \text{❜} y\rangle = xy$$

这里的 $\mathfrak{f}$ 假定是一个二元的函数字母,显然,这个 Γ 是一个递归算法,而且是定义連接这一函数的算法,其中的 $\mathfrak{f}$ 即表示連接函数 f, 因之連接是一个递归函数.

設我們給定了字母表 $\mathscr{A}$,

$$\mathscr{A} = \{o_1, \cdots, o_k\},$$

取 $\mathscr{A}$ 中的相异的两个字名为 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{f}$;为了方便起見,我們可即取 ⊙ 与 o_1 作为 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{f}$.

2. $\mathscr{A}$ 中的字的运算

$$x \,\underline{\cup}\, y = \begin{cases} \odot & \text{当 } x = y \text{ 时} \\ o_1 & \text{当 } x \neq y \text{ 时} \end{cases}$$

是一个二元的递归全函数. $\underline{\cup}$ 这一运算或函数显然是满足以下条件的:

$$(1)\quad \begin{cases} (1.1)\ \ x o_i \,\underline{\cup}\, \odot = o_1 & i = 1, \cdots, k \\ (1.2)\ \ x o_i \,\underline{\cup}\, y o_j = o_1 & i \neq j,\ i, j = 1, \cdots, k \\ (1.3)\ \ x \,\underline{\cup}\, x = \odot & \\ (1.4)\ \ x o_i \,\underline{\cup}\, y o_i = x \,\underline{\cup}\, y & i = 1, \cdots, k \\ (1.5)\ \ x \,\underline{\cup}\, y = y \,\underline{\cup}\, x^{1)} & \end{cases}$$

不但如此,而且(1)也完完全全把 $\underline{\cup}$ 这一运算确定了. 我們很容易仿(1)来构造一个定义 $\underline{\cup}$ 的递归算法 Γ. Γ 中若包括以下形式等式[2]:

$$(2)\quad \begin{cases} (2.1) \begin{cases} \mathfrak{f}\langle x o_1 \text{❜} \odot\rangle = o_1 \quad\text{或即 } \mathfrak{f}\langle x o_1 \text{❜}\rangle = o_1 \text{ 下同} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{f}\langle x o_k \text{❜} \odot\rangle = o_1 \end{cases} \\ (2.2) \begin{cases} \mathfrak{f}\langle x o_1 \text{❜} y o_2\rangle = o_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{f}\langle x o_1 \text{❜} y o_k\rangle = o_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{f}\langle x o_{k-1} \text{❜} y o_k\rangle = o_1 \end{cases} \\ (2.3)\ \ \mathfrak{f}\langle x \text{❜} x\rangle = \odot \\ (2.4) \begin{cases} \mathfrak{f}\langle x o_1 \text{❜} y o_1\rangle = \mathfrak{f}\langle x \text{❜} y\rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{f}\langle x o_k \text{❜} y o_k\rangle = \mathfrak{f}\langle x \text{❜} y\rangle \end{cases} \\ (2.5)\ \ \mathfrak{f}\langle x \text{❜} y\rangle = \mathfrak{f}\langle y \text{❜} x\rangle, \end{cases}$$

---

1) (1.5) 可以改为 $\odot \,\underline{\cup}\, x o_i = o_1,\ i = 1, \cdots, k.$

2) 讀者可注意(2)中的(2.1),…,(2.5)相当于(1)中的(1.1),…,(1.5).

則它就是定义 $\veebar$ 的一个递归算法；因为，显然，任何字 a, b, c，$a \veebar b = c$ 的必要与充分条件是．

$$\Gamma \vdash f\langle a \,\mathbf{,}\, b\rangle = c,$$

在递归算法 Γ 中的主函数字母 f 表示了 Γ 所定义的函数 $\veebar$.

設 Γ 即(2)，我們举一个 Γ 中的計算的例子，它是根据 Γ 对 $f\langle o_1o_3o_2o_1 \,\mathbf{,}\, o_3o_2o_2o_1\rangle$ 的計算：

(1°)　$f\langle xo_1 \,\mathbf{,}\, yo_1\rangle = f\langle x \,\mathbf{,}\, y\rangle$

(2°)　$f\langle o_1o_3o_2o_1 \,\mathbf{,}\, o_3o_2o_2o_1\rangle = f\langle o_1o_3o_2 \,\mathbf{,}\, o_3o_2o_2\rangle$

(3°)　$f\langle xo_2 \,\mathbf{,}\, yo_2\rangle = f\langle x \,\mathbf{,}\, y\rangle$

(4°)　$f\langle o_1o_3o_2 \,\mathbf{,}\, o_3o_2o_2\rangle = f\langle o_1o_3 \,\mathbf{,}\, o_3o_2\rangle$

(5°)　$f\langle xo_3 \,\mathbf{,}\, yo_2\rangle = o_1$

(6°)　$f\langle o_1o_3 \,\mathbf{,}\, o_3o_2\rangle = o_1$

(7°)　$f\langle o_1o_3o_2 \,\mathbf{,}\, o_3o_2o_2\rangle = o_1$

(8°)　$f\langle o_1o_3o_2o_1 \,\mathbf{,}\, o_3o_2o_2o_1\rangle = o_1$

形式等式序列

$$(1°),\ (2°),\ \cdots,\ (8°)$$

就是对 $f\langle o_1o_3o_2o_1 \,\mathbf{,}\, o_3o_2o_2o_1\rangle$ 的計算，而計算結果为 o_1. 由之肯定：

$$\Gamma \vdash f\langle o_1o_3o_2o_1 \,\mathbf{,}\, o_3o_2o_2o_1\rangle = o_1$$

字的相等是一个递归謂詞，因为有个递归函数，即 $\veebar$ 是它的表示函数：

$$x = y \Longleftrightarrow x \veebar y = \odot.$$

方才两个例子中引进的递归函数都是全函数，以下我們举出几个很有用的递归偏函数．

3. 拟邏輯詞項 $\sim, \curlyvee, \rightharpoondown, \curlywedge$.

$\sim$ 是一元函数；$\curlyvee, \rightharpoondown, \curlywedge$ 都是二元函数．它們不仅是指由以下的(3)—(6)所确定的函数，并且亦指任何满足(3)—(6)的函数，这样的满足(3)—(6)的函数(可能仍是偏函数，例如(3′)—(6′)中所确定的，或者是全函数，例如(3″)—(6″)中所确定的)，我們亦分别以 $\sim, \curlyvee, \rightharpoondown, \curlywedge$ 表示，并亦称为拟邏輯詞項．

(3)
$$\begin{cases} \sim\odot = o_1 \\ \sim o_1 = \odot, \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} \odot \curlyvee \odot = \odot \\ \odot \curlyvee o_1 = \odot \\ o_1 \curlyvee \odot = \odot \\ o_1 \curlyvee o_1 = o_1, \end{cases}$$

(5)
$$x \rightharpoondown y = (\sim x) \curlyvee y \quad 或簡作 \sim x \curlyvee y,$$

(6)
$$\begin{cases} \odot \curlywedge \odot = \odot \\ \odot \curlywedge o_1 = o_1 \\ o_1 \curlywedge \odot = o_1 \\ o_1 \curlywedge o_1 = o_1. \end{cases}$$

由(3)—(6)所确定的函数都仅当变元取 $\odot$ 或 o_1 为值时才有定义,否则是沒有定义的,故都是偏函数. 如果把 $\odot$ 与 o_1, 或 t 与 f 看作真假值,那么它們恰好与古典二值命題演算中的連接詞 $\neg$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\wedge$ 相一致.

如果将(3)—(6)改为(3′)—(6′):

$$(3')\qquad \begin{cases} \sim\odot = o_1 \\ \sim o_1 = \odot, \end{cases}$$

$$(4')\qquad \begin{cases} \odot \curlyvee x = \odot \\ o_1 \curlyvee x = x \\ x \curlyvee y = y \curlyvee x, \end{cases}$$

$$(5')\qquad x \rightharpoondown y = \sim x \curlyvee y,$$

$$(6')\qquad \begin{cases} \odot \curlywedge x = x \\ o_1 \curlywedge x = o_1 \\ x \curlywedge y = y \curlywedge x, \end{cases}$$

则所确定的函数是分别满足(3)—(6)的. 由(3′)—(6′)确定的拟邏輯詞項仍都是偏函数,例如 $x \curlyvee y$, 仅当 x, y 中有一个取 $\odot$ 或 o_1 为值时才有定义,否则沒有定义. 設 $f(x)$ 是一偏函数,则函数

$$o_1 \curlyvee f(x),$$

有无定义取决于 $f(x)$ 有无定义.

在本文的續篇中我們要用到下面的拟邏輯詞項:

$$(3'')\qquad \sim x = \begin{cases} \odot & \text{当 } x = o_1 \\ o_1 & \text{其他情形}, \end{cases}$$

$$(4'')\qquad x \curlyvee y = \begin{cases} o_1 & \text{当 } x = y = o_1 \\ \odot & \text{其他情形}, \end{cases}$$

$$(5'')\qquad x \rightharpoondown y = \sim x \curlyvee y,$$

$$(6'')\qquad x \curlywedge y = \begin{cases} \odot & \text{当 } x = y = \odot \\ o_1 & \text{其他情形}. \end{cases}$$

它們显然亦是分别满足(3)—(6)的,但它們都是全函数.

由(3′)—(6′)所定义的偏函数 $\sim$, $\curlyvee$, $\rightharpoondown$, $\curlywedge$ 亦很象命題演算中的連接詞. 如果把 $\odot$, o_1 或 t, f 即当作真假值,并把"沒有定义"当作第三个真假值,記作 u, 那末它們恰好满足 Kleene[1)] 的強表:

	$\sim$
t	f
f	t
u	u

$\curlyvee$	t	f	u
t	t	t	t
f	t	f	u
u	t	u	u

$\rightharpoondown$	t	f	u
t	t	f	u
f	t	t	t
u	t	u	u

$\curlywedge$	t	f	u
t	t	f	u
f	f	f	f
u	u	f	u

仿(3′)—(6′)可以直接写出定义 $\sim$, $\curlyvee$, $\rightharpoondown$, $\curlywedge$ 的递归算法 Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4. 例如,合

1) 見 Kleene[10] 第 334 頁. 如果我們把(4′),(6′)分别改为(4),(6),则所满足的即是 Kleene 的所謂弱表了.

Γ_1 中包括以下两个形式等式

$$(7)\quad \begin{cases} f\langle\odot\rangle = o_1 \\ f\langle o_1\rangle = \odot. \end{cases}$$

显然，乞是定义 $\sim$ 的．再令 Γ_2 中包括以下三个形式等式：

$$(8)\quad \begin{cases} g\langle\odot \,;\, x\rangle = \odot \\ g\langle o_1 \,;\, x\rangle = x \\ g\langle x \,;\, y\rangle = g\langle y \,;\, x\rangle, \end{cases}$$

显然乞是定义 $\curlyvee$ 的．再令 Γ_3 为由 Γ_1, Γ_2 再加上一个相应于(5)的等式如

$$(9)\quad \begin{cases} f\langle\odot\rangle = o_1 \\ f\langle o_1\rangle = \odot \\ g\langle\odot \,;\, x\rangle = \odot \\ g\langle o_1 \,;\, x\rangle = x \\ g\langle x \,;\, y\rangle = g\langle y \,;\, x\rangle \\ h\langle x \,;\, y\rangle = g\langle f\langle x\rangle \,;\, y\rangle, \end{cases}$$

那末 Γ_3 就是定义 $\rightharpoondown$ 的遞归算法．定义 $\curlywedge$ 的遞归算法 Γ_4 也显然是很容易写出的．

从上面所講到的，我們要說明以下两点．

第一，如前面所說，(1)中的 $2k + \frac{k(k-1)}{2} + 2$ 个等式[1] 可以把 $\succeq$ 这一运算完全确定了，对于任何 $\mathscr{A}$ 中的字 $x, y, x \succeq y$ 是什么，可以完全由(1)来确定，可以据以計算出来．象(1)中那样的等式，我們可以称之为遞归等式，有了象(1)这样一个系統的遞归等式，实际上就巳經确定了一个遞归函数．不严格地講，遞归函数就是这样由有穷个遞归等式确定的函数．可是这样講是不严格的，我們在这一段文字里用了"遞归等式"，"确定"，"計算"这样一些名詞，可是这些名詞是含混的，因此，我們无法根据这些名詞来数学地处理遞归函数的一般問題．我們在 §2 里引进的象"遞归算法"，"計算"等概念就是为了使这些概念成为精确的数学概念．在我們知道了"遞归函数"的严格的数学定义之后，并且，我們又知道了这些定义中所反映的事物的直覺意义之后，我們又举出了一个函数 f，說乞满足那些等式(直覚上的所謂遞归等式)，知道 f 的函数值是怎样計算的，我們就可以很清楚地来如何由这些等式构造出定义 f 的遞归算法 Γ 来了，在这样的时候，自然，我們沒有必要再把 Γ 写出来．以后，在我們象上面那样举出了确定 $\succeq$ 的(1)，因而(2)的如何写法巳属显然的时候，我們就用不到再把(2)写出来了．我們再举一例(不編号碼)：設

$$x = a_1 a_2 \cdots a_n,\ a_1, \cdots, a_n \text{ 是 } \mathscr{A} = \{o_1, \cdots, o_k\} \text{ 中字母.}$$

令

$$\breve{x} = a_n \cdots a_2 a_1,$$

則 $\smile$ 是一遞归函数，乞满足以下条件：

$$(10)\quad \begin{cases} \breve{\odot} = \odot \\ \breve{\overline{xo_i}} = o_i \breve{x} \end{cases}$$

---

1) 这里的"等式"是我們行文中的等式，是指表示那些字与那些字是相等的中文字句，不象 (2) 中的形式等式那样是 $\mathscr{A}$ 的扩大的字母表中的字．

如何仿(10)写出定义 $\smile$ 的递归算法是显然的，因之用不到再写出.

第二，定义一个递归函数的算法是无穷多的. 如果 Γ 定义 f，那么我們把 Γ 中的主函数字母作相应改变之后仍可以定义 f，例如，把(2)中的 f 改为 $f_1, f_2, \cdots$ 都无不可.

上面的等式序列(0)，(1)，(3)，(4)等都定义了一些函数. 例如(1)加上对它的説明是説，$x \veebar y =_{df}$ 满足以下条件的函数 $f(x, y)$：

$$\begin{cases} f(xo_i, \odot) = o_1, \quad i = 1, \cdots, k; \\ f(xo_i, yo_j) = o_1, \quad i \neq j; \ i, j = 1, \cdots, k; \\ f(x, x) = \odot; \\ f(xo_i, yo_i) = f(x, y), \quad i = 1, \cdots, k; \\ f(x, y) = f(y, x). \end{cases}$$

所以"$\veebar$"实际上是通过定义引进的符号，我們也就可以把(1)写作例如：

$$(11) \begin{cases} (11.1) \quad xo_i \veebar \odot =_{df} o_1, \quad i = 1, \cdots, k; \\ (11.2) \quad xo_i \veebar yo_j =_{df} o_1, \quad i \neq j, i, j = 1, \cdots, k; \\ (11.3) \quad x \veebar x =_{df} \odot; \\ (11.4) \quad xo_i \veebar yo_i =_{df} x \veebar y, \quad i = 1, \cdots, k; \\ (11.5) \quad x \veebar y =_{df} y \veebar x. \end{cases}$$

在自然数的递归函数論中有相对的递归性概念"递归于". 我們在递归算法論中也要采用类似的概念.

設 Γ 是一个等式的有穷序列，$\mathrm{f}_1, \cdots, \mathrm{f}_n$ 是只在 Γ 中形式等式的右方[1]出现的 n 个函数字母；又設 $f_1, \cdots, f_n$ 是 n 个在 $\mathscr{A}$ 中的字集里有定义的函数，它們不一定是全函数，对于某些字可能沒有定义，也不要求它們是递归函数；f_i 与 f_i $(i = 1, \cdots, n)$ 的元数相同，即，若 f_i 为 k_i 元函数字母，则 f_i 是 k_i 个变元的函数；設 $\mathrm{f}_i (i = 1, \cdots, n)$ 为 k_i 元函数字母；又，Γ 有一 m 元的主函数字母 f. 我們仿 Kleene 以

$$(12) \qquad \Gamma \begin{matrix} f_1 \cdots f_n \\ \mathrm{f}_1 \cdots \mathrm{f}_n \end{matrix} \Bigg|$$

表示这样一个一般是无穷的形式等式集[2]：(12) 中的元是具有形式

$$(13) \qquad \mathrm{f}_i \langle a_1 , \cdots , a_{k_i} \rangle = a, \quad i = 1, \cdots, n$$

的形式等式，一个形式等式(13)属于(12)的充分必要条件是

$$(14) \qquad f_i(a_1, \cdots, a_{k_i}) = a.$$

我們还要引用以下的写法

$$(15) \qquad \Gamma \begin{matrix} f_1 \cdots f_n \\ \mathrm{f}_1 \cdots \mathrm{f}_n \end{matrix} \Bigg|, \quad \Gamma \vdash \mathrm{f} \langle a_1 , \cdots , a_m \rangle = a.$$

(15)表示：有一形式等式的序列

$$(16) \qquad e_1, \cdots, e_k,$$

其中每一 e_i 是(12)中的一元或 Γ 中的一项，或者由(16)中在它前面的經 $\mathbf{R}_1$ 或 $\mathbf{R}_2$ 而得，

---

1) 右方是指形式等式中等号的右方.

2) 也可能有穷，当所有的 f_i 都只在有穷个字上有定义时就有穷了.

而 e_k 即为(15)中在 $\vdash$ 右边的形式等式:

$$\mathrm{f}\langle a_1, \cdots, a_m\rangle = a,$$

这样的(16)我們也称为一个計算. 設对于任何变元数合适的、$\mathscr{A}$ 中的函数 $f_1, \cdots, f_n$ (即 f_i 与 f_i 的变元数目同为 k_i, $i = 1, \cdots, n$),对于任何 $a_1, \cdots, a_m$,若有 a 使(15)成立,則 a 是唯一的. 这样,我們称 Γ 連同 $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ 为一递归算子算法,特别是一 n 元的递归算子算法. 設 f 是一 $\mathscr{A}$ 中的 m 元函数,函数值亦是 $\mathscr{A}$ 中的字. 設有一等式的有穷序列 Γ, Γ 的主函数字母为一 m 元函数字母 f. 設对于任意的 $\mathscr{A}$ 中的字 $a_1, \cdots, a_m, a$, 如果 $f(a_1, \cdots, a_m)$ 有定义,則

$$f(a_1, \cdots, a_m) = a \tag{17}$$

成立的必要与充分条件是(15)成立; 如果 $f(a_1, \cdots, a_m)$ 沒有定义, 則对于任何的 $\mathscr{A}$ 中的字 b,

$$\Gamma \left. \begin{matrix} f_1 \cdots f_n \\ \mathrm{f}_1 \cdots \mathrm{f}_n \end{matrix} \right|, \quad \Gamma \vdash \mathrm{f}\langle a_1, \cdots, a_m\rangle = b$$

恆不成立. 那么,我們說, f 递归于 $f_1, \cdots, f_n$;并說, Γ 定义 f 递归于 $f_1, \cdots, f_n$. 我們也說, Γ 中的 f 表示 f, Γ 中的 $\mathrm{f}_1, \cdots, \mathrm{f}_n$ 表示相应的 $f_1, \cdots, f_n$.

一个 n 元的递归算子算法 Γ,确定一个由 n 个函数 $f_1, \cdots, f_n$ 到一个函数 f 的轉換关系;当递归算子算法 Γ 給定了, n 个函数 $f_1, \cdots, f_n$ 也給定了, 則这个 f 也就完全确定了; f 的值是这样确定的,給定 $a_1, \cdots, a_m$,我們看有沒有 a 使(15)成立,若有,則这唯一的 a 即是 $f(a_1, \cdots, a_m)$所取的值,否則 $f(a_1, \cdots, a_m)$无定义;一个 n 元的递归算子算法所确定的由函数到函数的轉換关系,是一 n 元的算子、或 n 元的函数的函数、或 n 元的泛函数 $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F}(f_1, \cdots, f_n) = f. \tag{18}$$

这样的算子我們称为一 n 元的递归算子,或 n 元的递归泛函数,我們也說 Γ 以 $(\mathrm{f};\ \mathrm{f}_1, \cdots, \mathrm{f}_n)$ 表示 $\boldsymbol{F}$.

我們也可以先定义表示相对递归性的"递归算子算法"与"Γ 定义 f 递归于 $f_1, \cdots, f_n$"的概念;然后,当 $n = 0$ 时,即得到"递归算法"与"Γ 定义 f"的概念作为特殊情形.

下面我們举几个递归算子的例子.

4. 代入运算:

(19)　$\boldsymbol{S}_i(f, g) = h$　函数代入,

(20)　$\boldsymbol{S}_{ia}(f) = g$　常字代入,

(21)　$\boldsymbol{C}_{ij}(f) = g$　变元互换,

(22)　$\boldsymbol{I}_{ij}(f) = g$　变元等同.

上面(19)中的 f, g 設是 n, m 元的函数, $1 \leqslant i \leqslant n$, h 是一 $m + n - 1$ 元的函数. (19)是說

$$h(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_1, \cdots, y_m, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \\ = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, g(y_1, \cdots, y_m), x_{i+1}, \cdots, x_n). \tag{19.1}$$

上面(20)中的 f 設是一 n 元函数, $i \leqslant n$, g 是一 $n - 1$ 元的函数, a 是一固定的字, (20)是說

$$g(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n). \tag{20.1}$$

上面的(21)中的 f 与 g 都是 n 元函数，$1 \leqslant i < j \leqslant n$. 21說

$$(21.1) \quad g(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \cdots, x_n).$$

上面(22)中的 f 是 n 元的函数，g 是 $n-1$ 元函数，$1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j$.(22)是說

$$(22.1) \quad g(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \cdots, x_n).$$

容易看出，S_i, S_{ia}, C_{ij}, I_{ij} 这些算子都是递归算子．例如 S_i 是一递归算子，只要仿(19.1)构造一递归算子算法 Γ，Γ 中只要包含一个形式等式，如

$$\mathrm{h}\langle \mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_{i-1}, \mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_m, \mathrm{x}_{i+1}, \cdots, \mathrm{x}_n \rangle =$$
$$= \mathrm{f}\langle \mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_{i-1}, \mathrm{g}\langle \mathrm{y}_1, \cdots, \mathrm{y}_m \rangle, \mathrm{x}_{i+1}, \cdots, \mathrm{x}_n \rangle,$$

在这 Γ 中以 (h; f, g) 表示 S_i.

5. 算子 $\langle \partial x \rangle_y$, $\langle x \rangle_y$

$\langle \partial x \rangle_y$, $\langle x \rangle_y$ 表示以下的算子:

$$\langle \partial x \rangle_y f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \begin{cases} \odot & \text{如有一 } y \text{ 的子字 } x\text{，使} \\ & f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \odot \\ o_1 & \text{如所有 } y \text{ 的子字 } x\text{，都使} \\ & f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) \neq \odot \end{cases}$$

$$\langle x \rangle_y f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \begin{cases} \odot & \text{如所有 } y \text{ 的子字 } x \text{ 都使} \\ & f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \odot \\ o_1 & \text{如有一 } y \text{ 的子字 } x\text{，使} \\ & f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) \neq \odot \end{cases}$$

所謂 x 是 y 的子字是說 y 有形式 $x_1 x x_2$；因此 x 可以卽是 y，亦可以是 ⊙.

令 sg 为一递归全函数

$$(23) \quad \begin{cases} sg(\odot) =_{df} \odot, \\ sg(xo_i) =_{df} o_1, \quad i = 1, \cdots, k. \end{cases}$$

如果令 $\boldsymbol{\exists}_i(f) = g$, $\boldsymbol{\forall}_i(f) = h \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$ 指

$$g(x_1, \cdots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \langle \partial x \rangle_y f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n),$$
$$h(x_1, \cdots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \langle x \rangle_y f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n).$$

则可以通过以下的递归等式(写成定义形式)看出 $\boldsymbol{\exists}_i$, $\boldsymbol{\forall}_i$ 是递归算子.

$$(24) \begin{cases} \langle \partial x \rangle^R_{\odot} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) =_{df} sg\, f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \odot, x_{i+1}, \cdots, x_n), \\ \langle \partial x \rangle^R_{o_j y} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) =_{df} \\ \qquad sg\, f(x_1, \cdots, x_{i-1}, o_j y, x_{i+1}, \cdots, x_n) \curlyvee \langle \partial x \rangle^R_y f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\ \qquad\qquad j = 1, \cdots, k. \\ \langle \partial x \rangle_{\odot} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) =_{df} sg\, f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \odot, x_{i+1}, \cdots, x_n), \\ \langle \partial x \rangle_{yo_j} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) =_{df} \\ \qquad \langle \partial x \rangle_y f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) \curlyvee \langle \partial x \rangle^R_{yo_j} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\ \qquad\qquad j = 1, \cdots, k, \end{cases}$$

其中的 $\langle \partial x \rangle^R_y$ 表示以下的算子:

$$\langle\partial x\rangle_y^R f(x_1,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)=\begin{cases}\odot & \text{如有一 } y \text{ 的右端子字 } x\text{（即 } y=zx\text{），使}\\ & f(x_1,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)=\odot,\\ o_1 & \text{如所有 } y \text{ 的右端子字 } x\text{，都使}\\ & f(x_1,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)\neq\odot.\end{cases}$$

(25) $$\langle x\rangle_y f(x_1,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)=_{df}\sim$$
$$\sim\langle\partial x\rangle_y\sim sg\,f(x_1,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n).$$

仿(23),(24)可以构造出定义算子 $\boldsymbol{\exists}_i$ 的递归算子算法；仿(23),(24),(25)放在一起，卽可由之构造出定义算子 $\boldsymbol{\forall}_i$ 的递归算子算法.

上面我們所說的算子 $\langle\partial x\rangle_y$, $\langle x\rangle_y$,严格說来,是指算子 $\boldsymbol{\exists}_i$ 与 $\boldsymbol{\forall}_i$.

由上面的各例我們陈述以下輔助定理的一部分,以便征引.

輔助定理 1. 連接, $\veebar$, $\sim$, $\curlyvee$, $\neg$, $\curlywedge$, sg 各函数都是递归函数. 各代入算子及算子 $\langle\partial x\rangle_y$, $\langle x\rangle_y$ 都是递归算子.

我們令

(26) $$x \not\veebar y=_{df}\sim(x\veebar y),$$
$$\langle\partial x_1,\cdots,x_n\rangle_y\cdots=_{df}\langle\partial x_1\rangle_y\langle\partial x_2\rangle_y\cdots\langle\partial x_n\rangle_y\cdots,$$

(27) $$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle_y\cdots=_{df}\langle x_1\rangle_y\cdots\langle x_n\rangle_y\cdots.$$

上面講到的 $\veebar$, $\sim$, $\curlyvee$, $\curlywedge$, $\neg$ $\langle\partial x\rangle_y$, $\langle x\rangle_y$ 我們都称为拟邏輯詞項，相当于邏輯詞項 $=$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$, $(\exists x)_y$, $(\forall x)_y$. $(\exists x)_y$ 与 $(\forall x)_y$ 可定义如下:

$$In(x,y)=_{df}(\exists x_1,x_2)[y=x_1xx_2],$$
$$(\exists x)_yR(x)=_{df}(\exists x)[In(x,y)\wedge R(x)],$$
$$(\forall x)_yR(x)=_{df}(\forall x)[In(x,y)\Longrightarrow R(x)].$$

当然,謂詞 R 的变元中,除 x 外还可以有参数.

§4. 递归算法与递归函数的发展

設有一个递归算法的序列

(1) $$\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3,\ \cdots,$$

其中每一个 $\Gamma_i(i>1)$ 为由(1)中在它前面的 Γ_{i-1} 再加上几个形式等式而得，換言之，每一 $\Gamma_i(i\geqslant 1)$ 为一形式等式的有穷序列

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_{n_i},$$

这里有 $n_1<n_2<\cdots$. 我們称这样的一个(1)为一**递归算法的发展**. 一个递归算法的发展自然确定了一个序列的递归函数

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \cdots,$$

其中的 f_i 为 Γ_i 所定义. 这样一个递归函数的序列，我們也称为一个**递归函数的发展**.

关于递归算法的发展,我們要在这里提出一項注意. 令

$$\Delta_1=\Gamma_1,$$
$$\Delta_{i+1}=e_{n_i+1},\ \cdots,\ e_{n_{i+1}},$$

則

$$\Gamma_{i+1}=\Gamma_i,\Delta_{i+1}.$$

$\Delta_1 = \Gamma_1$ 按假定是遞归算法. Γ_{i+1} 按假定是遞归算法,而按假定 Δ_{i+1} 也应当是遞归算法. Γ_{i+1} 与 Δ_{i+1} 中的主函数字母虽然是一样的,然所表示的函数却不一定相同.

一个遞归算法的发展例如以这样的 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 开始,它們就是 § 3 中的(7), (8), (9) 它們确定的函数順序地是 $\sim, \curlyvee, \neg$. 正象我們在定义一个遞归函数时只要写出确定这函数的遞归式,并借以看得出如何构造相应的遞归算法就够了(見 § 3,(11)),我們在給出一个遞归函数的发展时,只要写出确定它們的相应的遞归式. 例如当我們定义以 $\sim, \curlyvee, \neg$ 开始的遞归函数的发展时, 用不到給出 § 3 中的(7), (8), (9), 只要按 § 3 中的(3′), (4′), (5′)写作

$$(2) \quad \begin{cases} \sim\odot =_{df} o_1, \\ \sim o_1 =_{df} \odot, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \odot \curlyvee x =_{df} \odot \\ o_1 \curlyvee x =_{df} x \\ x \curlyvee y =_{df} y \curlyvee x, \end{cases}$$

$$(4) \quad x \neg y =_{df} (\sim x) \curlyvee y.$$

因为由之就可以构造出相应的 § 3 中的(7),(8),(9)了. 此后,我們約定,当我們順序写(2),(3),(4)时,我們卽用来表示由§3中的(7),(8),(9)定义出 $\sim, \curlyvee, \neg$,而不是,例如,表示由 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 来定义遞归函数.

在我們发展一个数学理論时,为了不同目的可以朝着不同的方向去发展;一个数学理論在为了某一目的朝着一个方向去发展时要通过定义引进不同的概念. 按照一定的秩序先后引进.(概念不外两种,卽表示函数与謂詞的概念). 能行性理論也是可以为了不同目的,不同要求而有不同方向的发展,历史上由之形成不同的能行性理論. 这些不同方向、不同方向的发展、不同的理論,可以在遞归算法論中以具体的遞归算法的发展、遞归函数的发展来反映.

这里我們还要通过例子对遞归謂詞的表示函数作一些説明. 以下这一段文字为了便于征引記作(一).

(一)我們称 x 是 y 的左端,如果有 y 的子字 x_1,使 $y = xx_1$;我們称 x 是 y 的右端,如果有 y 的子字 x_1,使 $y = x_1x$;我們称 x 在 y 中出現,如果有 y 的子字 x_1, x_2, 使 $y = x_1xx_2$;如果字母表 $\mathscr{A}$ 中的字母 $o_1, \cdots, o_k$ 尙未給出,我們也可以定义"x 是一字母"如下,我們称 x 是一字母,如果 x 不是空字,而且任何 x 的子字 y, z, 如果 $x=yz$,則 y 与 z 中至少有一个字是空字;我們称 x 是 y 中的字,卽説,任何 x 的子字 z, 如果 z 是字,則 z 必在 y 中出現. 我們称 u 是从 x 把其中最左的一个 y 替换之以 z 而得,是説,有 x 的子字 x_1, x_2, 使 $x = x_1yx_2$, $u = x_1zx_2$,并且,任何 x 的子字 z_1, z_2, 如果 $x=z_1yz_2$, 那么, x_1 就是 z_1 的左端.

我們以

(5)

$Int(x, y)$	表示	x 是 y 的左端
$End(x, y)$	表示	x 是 y 的右端
$In(x, y)$	表示	x 在 y 中出現
$Al(x)$	表示	x 是一字母
$Wor(x, y)$	表示	x 是 y 中的字

$Sub(u, x, y, z)$ 表示　　u 是从 x 把其中最左的一个 y 替換之以 z 而得

$(\exists x)_y \cdots$ 　表示　　有 y 的子字 x 使$\cdots$

$(\forall x)_y \cdots$ 　表示　　任何 y 的子字 $x \cdots$

引用了这些符号，上面那一段文字中的定义可以簡单地“翻譯”成以下的形式：

$$
(6)\begin{cases}
Int(x, y) &=_{df} (\exists x_1)_y[y = xx_1] \\
End(x, y) &=_{df} (\exists x_1)_y[y = x_1x] \\
In(x, y) &=_{df} (\exists x_1, x_2)_y[y = x_1xx_2] \\
Al(x) &=_{df} x \neq \odot \wedge (\forall y, z)_x[x = yz \Longrightarrow y = \odot \vee z = \odot] \\
Wor(x, y) &=_{df} (\forall z)_x[Al(z) \Longrightarrow In(z, y)] \\
Sub(u, x, y, z) &=_{df} (\exists x_1, x_2)_x\{x = x_1yx_2 \wedge u = x_1zx_2 \wedge \\
&\qquad (\forall z_1, z_2)_x[x = z_1yz_2 \Longrightarrow Int(x_1, z_1)]\}.
\end{cases}
$$

我們以 *int, end, in, al, wor, sub* 表示 *Int, End, In, Al, Wor, Sub* 这六个謂詞的表示函数，据定义有

$$
(7)\begin{cases}
Int(x, y) \Longleftrightarrow int(x, y) = \odot \\
End(x, y) \Longleftrightarrow end(x, y) = \odot \\
In(x, y) \Longleftrightarrow in(x, y) = \odot \\
Al(x) \Longleftrightarrow al(x) = \odot \\
Wor(x, y) \Longleftrightarrow wor(x, y) = \odot \\
Sub(u, x, y, z) \Longleftrightarrow sub(u, x, y, z) = \odot.
\end{cases}
$$

現在，我們可以一眼看出这六个謂詞都是遞归謂詞，因为它們的表示函数可以仿(6)直接“翻譯”过来，如

$$
(8)\begin{cases}
int(x, y) &=_{df} \langle \partial x_1 \rangle_y[y \underline{\smile} xx_1] \\
end(x, y) &=_{df} \langle \partial x_1 \rangle_y[y \underline{\smile} x_1x] \\
in(x, y) &=_{df} \langle \partial x_1, x_2 \rangle_y[y \underline{\smile} x_1xx_2] \\
al(x) &=_{df} x \not\underline{\smile} \odot \curlywedge \langle y, z \rangle_x[x \underline{\smile} yz \rightarrow y \underline{\smile} \odot \curlyvee z \underline{\smile} \odot] \\
wor(x, y) &=_{df} \langle z \rangle_x[al(z) \rightarrow in(z, y)] \\
sub(u, x, y, z) &=_{df} \langle \partial x_1, x_2 \rangle_x\{x \underline{\smile} x_1yx_2 \curlywedge u \underline{\smile} x_1zx_2 \curlywedge \langle z_1, z_2 \rangle_x[x \underline{\smile} z_1yz_2 \rightarrow \\
&\qquad \rightarrow int(x_1, z_1)]\}.
\end{cases}
$$

由(8)据輔助定理 1 可以知道这六个函数是遞归的，而且是满足(7)的.

上面我們說明一个在遞归算法論中考虑問題的方法：由(一)經(5)，(6)，(7)到(8)是直接的，只要我們知道(一)与(8)的关系，显然，只要写出(一)，馬上可以知道，所定义的“x 是 y 的左端”等这些謂詞都是遞归謂詞，自然根本用不到再写出，(5)，(6)，(7)，(8). 反之，我們若先引入(8)那样的一些函数的定义，自然，也馬上可以知道，把 *int* 这些函数作为表示函数时，所表示的如“x 是 y 的左端”这样一些謂詞是遞归的. 因之，在实际处理問題时，只要象(一)那样陈述就够了，否則，象(8)那样引进定义也够了，二者只要取其一.

輔助定理 1（續完）. *int, end, in, al, wor, sub* 是遞归函数.

§5. A. A. Марков 的正規算法

通过一个特殊的递归算法的发展或递归函数的发展我們可以把 A. A. Марков 的正規算法的理論很簡捷地、很自然地包容到递归算法論的理論体系中来. 我們这里說到以递归算法論来包容正規算法論时,用了"簡捷","自然";这是說,在递归算法論的基础上,根据前面各节的解释,只要我們把正規算法論中的概念陈述清楚,不要經过多少推理就可以看出事实就是如此. 下面这一段文字我們称之为本节主要文字. 在这一段文字里我們就是要把正規算法論中的主要概念陈述清楚,并据以說明正規算法理論与递归算法論的关系. 以下的陈述在邏輯上是自足的,这就是說,讀者要是不知道 Марков 正規算法的概念,也是可以理解的.

假定給出一个字母表

$$\mathscr{A} = \{o_1, \cdots, o_k\},$$

我們要解释 $\mathscr{A}$ 中的正規算法. 我們考虑一个 $\mathscr{A}$ 的扩大的字母表 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ 中包括 $\mathscr{A}$ 中的字母之外还包括以下三个不在 $\mathscr{A}$ 中出現的字母:

$$\to \quad \to\cdot \quad \square$$ [1]

現在,我們来引进一些 $\mathscr{B}$ 中的謂詞与函数. 在下文中,在引进的謂詞后面括号中写的是这个謂詞的表示函数. 例如,在"x 是一簡单的替換公式"后面写"$(rep1(x))$",是表示"x 是一簡单的替換公式"这謂詞的表示函数写作"$rep1(x)$". 令

$$\mathrm{A} =_{df} o_1 \cdots o_k,$$

这是一个字. x 是一簡单的替換公式$(rep1(x))$,是說,有 x 的子字 y_1, y_2, 是A中的字,而 $x = y_1 \to y_2$. x 是一結尾的替換公式$(rep\,2(x))$,是說,有 x 的子字 y_1, y_2, 是A中的字而 $x = y_1 \to\cdot\, y_2$. x 是一个替換公式 $(rep(x))$,是說,x 是一簡单的,或結尾的替換公式. x 是 y 的左字$(lt(x, y))$,是說,有 y 的子字 z, $y = x \to z$ 或 $x \to\cdot\, z$. x 是 y 的右字 $(rt(x,y))$ 是說,有 y 的子字 z, $y = z \to x$ 或 $z \to\cdot\, x$. x 是 y 中的項$(el(x,y))$,是說,$\square x \square$ 在 y 中出現,然$\square$不在 x 中出現. z 中的 y 可以有效地应用于 $x(ef(x, y, z))$, 是說,有 z 的子字 y_1, y_2, y_3, 使 $z = y_1 \square y \square y_2$,而 y_3 是在 x 中出現的 y 的左字, 并且, 任何 z 的子字 x_1, x_2, 如果 $x_1 \neq \odot$, x_1 是 $y_1 \square$ 中的項, x_2 是 x_1 的左字, 則 x_2 卽不在 x 中出現. z 可施于 $x(apl(x, z))$,是說有 z 的子字 y,使 z 中的 y 可以有效地应用于 x,而 y 是一个替換公式. x 是一个施 z 于 y 的計算$(cal(x, y, z))$,是說 x, y, z 滿足以下三个条件: 1. 有 x 的子字 x_1, x_2, 使 $x = \square x_1 \square = \square y \square x_2$; 2. 任何 x 的子字 x_1, x_2, x_3, 如果 $x = x_1 \square x_2 \square x_3$, $\square$ 不在 x_2 中出現, z 不可施于 x_2, 那么, $x_3 = \odot$; 3. 任何 x 的子字 x_1, x_2, x_3, x_4, 如果 $x = x_1 \square x_2 \square x_3 \square x_4$, $\square$ 不在 x_2 也不在 x_3 中出現,那末,有 z 的子字 y_1, u_1, u_2, y_1 可以

---

1) 用 $\to$ 与 $\to\cdot$ 两个字母我們可以把 $\mathscr{A}$ 中的正規算法 $\mathfrak{A}$ 中的替換公式写作

$$a \to b, \quad a \to\cdot\, b$$

成为 $\mathscr{B}$ 中的字,前者表示簡单的替換公式,后者表示結尾的替換公式. $\square$ 是用来构造字的有穷序列的,[9]往往以 * 表示这样一个字母. 設 $a_1, \cdots, a_n$ 是 $\mathscr{A}$ 中的字,我們即以 $\mathscr{B}$ 中的字

$$\square a_1 \square \cdots \square a_n \square$$

来表示一个 $\mathscr{A}$ 中的字的序列

$$a_1, \cdots, a_n.$$

有效地应用于 x_2，u_1 是 y_1 的左字，u_2 是 y_1 的右字，x_3 是由 x_2 把其中最左的一个 u_1 替换之以 u_2 而得，并且，如 y_1 是一結尾的替换公式，則 $x_4 = \odot$．x 是一个正規算法（$nor(x)$），是說，有 x 的子字 x_1，$x = \square\, x_1 \square$，并且，任何 x 的子字 x_1，如果 x_1 是 x 中的項，則 x_1 是一个替换公式；更詳細地，应当說 x 是一个 $\mathscr{A}$ 中的正規算法；如果 x 是一个正規算法，則按假定 x 是一个 $\mathscr{B}$ 中的字．x 的末項，是由下面遞归等式定义的一元的函数 $las(x)$，

$$(1)\qquad \begin{cases} las(x\,\square\square) =_{df} \odot \\ las(x\,\square\, yo_i\,\square) =_{df} las(x\,\square\, y\,\square)o_i, \quad i = 1, \cdots, k. \end{cases}$$

我們令 $\langle \varepsilon x\rangle$ 是任意一个由 $n+1$ 元的函数 f 到 n 元函数 g 的遞归算子．設

$$(2)\qquad g(x_1, \cdots, x_n) = \langle \varepsilon x\rangle f(x_1, \cdots, x_n, x),$$

則 f 与 g 有以下的关系：有一 x 使

$$(3)\qquad f(x_1, \cdots, x_n, x) = \odot$$

的充分必要条件为

$$(3.1)\qquad f(x_1, \cdots, x_n, g(x_1, \cdots, x_n)) = \odot.$$

（2）写作以下形式更为合适

$$(4)\qquad g(x_1, \cdots, x_n) \simeq \langle \varepsilon x\rangle f(x_1, \cdots, x_n, x),$$

这是表示如果沒有 x，使（3）成立，則 $g(x_1, \cdots, x_n)$ 或 $\langle \varepsilon x\rangle f(x_1, \cdots, x_n, x)$ 无意义[1]．$\langle \varepsilon x\rangle f(x_1, \cdots, x_n, x)$ 可讀如"一个滿足条件 $f(x_1, \cdots, x_n, x) = \odot$ 的 x"．象 $\langle \varepsilon x\rangle$ 这样的遞归算子是很多的．例如我們引进以下的算子 $\langle \mu x\rangle$，就是 $\langle \varepsilon x\rangle$ 的一个例子

$$(5)\qquad \begin{cases} \sigma(\odot) =_{df} o_1 \\ \sigma(xo_i) =_{df} xo_{i+1}, \quad i \leqslant k+2,\ \text{設}\ o_{k+1}\ \text{即} \to,\ o_{k+2}\ \text{即} \twoheadrightarrow,\ o_{k+3}\ \text{即}\ \square \\ \sigma(xo_{k+3}) =_{df} \sigma(x)o_1 \\ h(\odot, x_1, \cdots, x_n, y) =_{df} y \\ h(\sigma(x), x_1, \cdots, x_n, y) =_{df} h(f(x_1, \cdots, x_n, \sigma(y)), x_1, \cdots, x_n, \sigma(y)) \\ \langle \mu x\rangle f(x_1, \cdots, x_n, x) =_{df} h(f(x_1, \cdots, x_n, \odot), x_1, \cdots, x_n, \odot). \end{cases}$$

現在設 $\mathfrak{A}$ 是一个正規算法，卽設

$$nor(\mathfrak{A}) = \odot.$$

令

$$(6)\qquad \mathfrak{A}(x) =_{df} \text{某一个施}\ \mathfrak{A}\ \text{于}\ x\ \text{的計算的末項}.$$

（本节主要文字完）

按 Марков[9]，如果对一正規算法 $\mathfrak{A}$，

$$\mathfrak{A}(x) = y,$$

則称 $\mathfrak{A}$ 改造字 x 为 y．本节主要文字实际上只是做了一件事情，就是把 Марков[9] 中关于正規算法的有关概念通过一系列的定义作了一个詳細的严格的規定，只是这一段文字也

1）严格地講可以把 ε 当作滿足以下条件的任意的遞归算子：

$$\varepsilon(f) = g,$$

其中設 f 是一 n 元的函数，g 为一 $n-1$ 元的函数，f 与 g 的关系仍是：有一 x 使(3)成立的充分必要条件为(3.1)成立．这样可令

$$\langle \varepsilon x\rangle f(x_1, \cdots, x_n, x) =_{df} \varepsilon(f)(x_1, \cdots, x_n) \quad \text{或} \quad =_{df} g(x_1, \cdots, x_n).$$

許使讀者感覚到是异常干燥、呆板、拙劣. 自然,文字可以象平常一样写得自然,这是因为所以要写成这样一付面目,是要使讀者容易看出,正象在本文 § 1 中所說的那样, 正規算法的理論可以在遞归算法論中得到很直接的陈述. 在本节的主要文字里,只是一些对概念的解释(即定义),通过解释用不到多少証明的步驟就可以得到下面的定理.

定理 1. 設 $\mathfrak{A}$ 是一正規算法,它的字母表为 $\mathscr{A}=\{o_1,\cdots,o_k\}$, 則 $\mathfrak{A}(x)$ 是一在 $\mathscr{A}$ 的扩大字母表 $\mathscr{B}=\{o_1,\cdots,o_k,\rightarrow,\twoheadrightarrow,\square\}$ 中的遞归函数.

証. 因为有

$$\mathfrak{A}(x)\simeq las\,(\langle\varepsilon y\rangle\ cal(y,x,\mathfrak{A})), \tag{1}$$

定理一即得到証明.

証明是严格而清楚的,照理无需再作說明. 为了便于征引,我們还要多写几行于下. 本节主要文字中所引进的謂詞都是遞归謂詞,因为它們的表示函数都是遞归函数,这一点只要把这些函数的定义写出,而写法可以如上一节中那样,由謂詞的定义直接翻譯过来,如

$$(\mathrm{M}_1)\quad rep1(x)=_{df}\langle\partial y_1,y_2\rangle_x[wor(y_1,A)\curlywedge wor(y_2,A)\curlywedge x\mathrel{\underline{\smile}}y_1\rightarrow y_2],$$

$$(\mathrm{M}_2)\quad rep2(x)=_{df}\langle\partial y_1,y_2\rangle_x[wor(y_1,A)\curlywedge wor(y_2,A)\curlywedge x\mathrel{\underline{\smile}}y_1\twoheadrightarrow y_2],$$

$$(\mathrm{M}_3)\quad rep(x)\ =_{df}\langle\partial y_1,y_2\rangle_x[wor(y_1,A)\curlywedge wor(y_2,A)\curlywedge(x\mathrel{\underline{\smile}}y_1\rightarrow y_2\curlyvee x\mathrel{\underline{\smile}}y_1\twoheadrightarrow y_2)],$$

$$(\mathrm{M}_4)\quad lt(x,y)=_{df}\langle\partial z\rangle_y[y\mathrel{\underline{\smile}}x\rightarrow z\curlyvee y\mathrel{\underline{\smile}}x\twoheadrightarrow z],$$

$$(\mathrm{M}_5)\quad rt(x,y)=_{df}\langle\partial z\rangle_y[y\mathrel{\underline{\smile}}z\rightarrow x\curlyvee z\twoheadrightarrow x],$$

$$(\mathrm{M}_6)\quad el(x,y)=_{df}in(\square x\square,y)\curlywedge\sim in(\square,x),$$

$$(\mathrm{M}_7)\quad ef(x,y,z)=_{df}\langle\partial y_1,y_2,y_3\rangle_z\{z\mathrel{\underline{\smile}}y_1\square y\square y_2\curlywedge lt(y_3,y)\curlywedge in(y_3,x)\curlywedge$$
$$\langle x_1,x_2\rangle_z[x_1\not\mathrel{\underline{\smile}}\odot\curlywedge el(x_1,y_1\square)\curlywedge lt(x_2,x_1)\rightharpoondown\sim in(x_2,x)]\},$$

$$(\mathrm{M}_8)\quad apl2(x,z)\ =_{df}\langle\partial y\rangle_z[ef(x,y,z)\curlywedge rep\,2(y)],$$

$$(\mathrm{M}_9)\quad apl(x,z)\ =_{df}\langle\partial y\rangle_z[ef(x,y,z)\curlywedge rep(y)],$$

$$(\mathrm{M}_{10})\quad cal(x,y,z)=_{df}\langle\partial x_1,x_2\rangle_x\{x\mathrel{\underline{\smile}}\square x_1\square\curlywedge x\mathrel{\underline{\smile}}\square y\square x_2\}\curlywedge$$
$$\langle x_1,x_2,x_3\rangle_x\{x\mathrel{\underline{\smile}}x_1\square x_2\square x_3\curlywedge\sim in(\square,x_2)\curlywedge\sim apl(x_2,z)\rightharpoondown x_3\mathrel{\underline{\smile}}\odot\}\curlywedge$$
$$\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle_x\{x\mathrel{\underline{\smile}}x_1\square x_2\square x_3\square x_4\curlywedge\sim in(\square,x_2)\curlywedge\sim in(\square,x_3)\rightharpoondown$$
$$\langle\partial y_1,u_1,u_2\rangle_x[ef(x_2,y_1,z)\curlywedge lt(u_1,y_1)\curlywedge rt(u_2,y_1)\curlywedge$$
$$sub(x_3,x_2,u_1,u_2)\cdot\curlywedge\cdot rep\,2(y_1)\rightharpoondown x_4\mathrel{\underline{\smile}}\odot]\}.$$

由上面的 (M_1) 到 (M_{10}),显然 cal 是一遞归函数;再由(1),即証明了本定理.

§ 6. 图　林　机　器

通过另一个遞归算法的发展或遞归函数的发展我們同样可以把图林机器的理論十分簡捷、自然地包括到遞归算法論的理論体系中来. 下面定义的有关图林机器的概念与說明可参考 Davis[11].

我們考虑的字母表包括以下字母

$$s_0,s_1,\cdots,s_m,q_1,\cdots,q_n,R,L,\square,$$

其中 $s_0,\cdots,s_m$ 称为机器符号, $q_1,\cdots,q_n$ 称为机器的内部状态, R 为(讀头的)右移符号, L 为左移符号, $\square$ 的解释如 § 5. 一个图林机器 T 是一个有穷的字的序列,序列中的每一項具有以下形式之一:

(1) $q_i s_j s_k q_l$

(2) $q_i s_j R q_l$

(3) $q_i s_j L q_l$

$(i, l = 1, \cdots, n;\ j, k = 1, \cdots, m)$，而沒有两項中的头两个字母是相同的，这样一个序列 T 我們以

$$\square\, a_1 \square \cdots \square\, a_p \square$$

表示，其中 $a_i (i = 1, \cdots, p)$ 为有形式(1)，(2)，(3)的字．我們令

$$S = s_0 s_1 \cdots s_m,$$

$$Q = q_1 \cdots q_n;$$

一个有形式

$$b_1 \cdots b_j \cdots b_r$$

的字称为图林机器 T 的瞬間描述，其中 $j < r$，b_j 为一 Q 中的字，其他 b_i，$i \neq j$，都是 S 中的字．我們說图林机器 T 使 x 轉入 y[1]，假如 x，y 是图林机器 T 的瞬間描述，它們有以下五个情况之一((4)，(5)，(6)，(7)，(8))：

(4) $x = x_1 q_i s_j x_2,\quad y = x_1 q_l s_k x_2,\quad T$ 中有 $q_i s_j s_k q_l$；

(5) $x = x_1 q_i s_j s_k x_2,\quad y = x_1 s_j q_l s_k x_2,\quad T$ 中有 $q_i s_j R q_l$；

(6) $x = x_1 q_i s_j,\quad y = x_1 s_j q_l s_0,\quad T$ 中有 $q_i s_j R q_l$；

(7) $x = x_1 s_k q_i s_j x_2,\quad y = x_1 q_l s_k s_j x_2,\quad T$ 中有 $q_i s_j L q_l$；

(8) $x = q_i s_j x_2,\quad y = q_l s_0 s_j x_2,\quad T$ 中有 $q_i s_j L q_l$.

我們說 x 是图林机器 T 的一个計算，是指：x 是一个 T 的瞬間描述的序列

$$\square\, c_1 \square \cdots \square\, c_t \square,$$

其中对每一个 $i < t$，T 都使 c_i 轉入 c_{i+1}，其中 c_1 是一有形式 $q_1 x_1$ 的瞬間描述，而不再有瞬間描述 d，使 c_t 轉入 d，并說 x 是 T 对 c_1 的計算，而写

$$res_T(c_1) = c_t$$

定理 2. 設 T 是一以 $s_0, s_1, \cdots, s_m$ 为机器符号，以 $q_1, \cdots, q_n$ 为内部状态的图林机器，則 $res_T(x)$ 是一字母表 $\{s_0, s_1, \cdots, s_m, q_1, \cdots, q_n, R, L, \square\}$ 中的递归函数．

証． 我們作以下四个递归函数的定义．在定义后面所写出的謂詞是以該函数作为表示函数时它所表示的謂詞．

$$alin(x, y) =_{df} al(x) \curlywedge in(x, y) \quad (x \text{ 是在 } y \text{ 中出現的字母});$$

$$inst(x, S, Q) =_{df} \langle \exists x_1, x_2, x_3 \rangle_x \{x \succeq x_1 x_2 x_3 \curlywedge wor(x_1, S) \curlywedge wor(x_3, S) \curlywedge x_3 \not\succeq \odot \curlywedge alin(x_2, Q)\} \quad (x \text{ 是一瞬間描述}).$$

$$go(x, y, T, S, Q) =_{df} \langle \exists x_1, y_1, z_1, z_2 \rangle_x \langle \exists x_2, y_2 \rangle_y \{alin(x_1, Q) \curlywedge alin(x_2, Q) \curlywedge alin(y_1, S) \curlywedge alin(y_2, S) \curlywedge wor(z_1, S) \curlywedge wor(z_2, S) \cdot \curlywedge \cdot [x \succeq z_1 x_1 y_1 z_2 \curlywedge y \succeq z_1 x_2 y_2 z_2 \curlywedge el(x_1 y_1 y_2 x_2, T)] \curlyvee [x \succeq z_1 x_1 y_1 y_2 z_2 \curlywedge y \succeq z_1 y_1 x_2 y_2 z_2 \curlywedge el(x_1 y_1 R x_2, T)] \curlyvee$$

1) 按 Davis[11] 記作 $x \to y(T)$.

$$[x \trianglerighteq z_1x_1y_1 \curlywedge y \trianglerighteq z_1y_1x_2s_0 \curlywedge el(x_1y_1Rx_2, T)] \curlyvee$$
$$[x \trianglerighteq z_1y_1x_1y_2z_2 \curlywedge y \trianglerighteq z_1x_2y_1y_2z_2 \curlywedge el(x_1y_1Lx_2, T)] \curlyvee$$
$$[x \trianglerighteq x_1y_2z_2 \curlywedge y \trianglerighteq x_2s_0y_2z_2 \curlywedge el(x_1y_1Lx_2, T)]\}$$

(*T* 使 *x* 轉入 *y*).

$comp(x, y, T, S, Q) =_{df}$

$$\langle \partial x_1 \rangle_x \{x \trianglerighteq \square\, x_1 \square\} \curlywedge$$
$$\langle x_1 \rangle_x \{el(x_1, x) \rightarrow inst(x_1, S, Q)\} \curlywedge$$
$$\langle \partial x_1 \rangle_x \langle \partial y_1 \rangle_y \{x \trianglerighteq \square\, y \square\, x_1 \curlywedge y \trianglerighteq q_1 y_1\} \curlywedge$$
$$\langle x_1, x_2, y_1, y_2 \rangle_x \{x \trianglerighteq y_1 \square\, x_1 \square\, x_2 \square\, y_2 \curlywedge \sim in(\square, x_1) \curlywedge$$
$$\sim in(\square, x_2) \rightarrow go(x_1, x_2, T, S, Q)\} \curlywedge$$
$$\langle \partial x_1, x_2, y_2, z_1, z_2 \rangle_x \{x \trianglerighteq x_1 \square\, z_1x_2y_2z_2 \square \curlywedge$$
$$alin(x_2, Q) \curlywedge alin(y_2, S) \curlywedge wor(z_1, S) \curlywedge wor(z_2, S) \curlywedge$$
$$\langle z_3, z_4 \rangle_x \sim el(x_2y_2z_3z_4, x)\}$$

(*x* 是 *T* 对 *y* 的計算).

从上面的定义有

$$res_T(x) = las\,(\langle \varepsilon y \rangle comp(y, x, T, S, Q)),$$

由之定理二得証.

在定理二的証明中,其实只包括一些对 $res_T(x)$ 这个函数的严格的定义，沒有用到其他邏輯推理的步驟.

§7.　自然数的递归函数

在把各种能行性理論包容于递归算法論中时,把通常所說的递归函数論,亦即自然数的递归函数論包容于递归算法論中是最为簡单自然的. 办法可有多种.

可以采用一个特殊的字母表,例如取一只有一个字母的字母表

$$\mathscr{A}_1 = \{1\},$$

然后把自然数 n 等同于 $\mathscr{A}_1$ 中的字

$$\underbrace{1 \cdots 1}_{n}$$

或者象 Kleene[10] 那样取字母表

$$\mathscr{A}_2 = \{0, '\},$$

然后把自然数 n 等同于 $\mathscr{A}_2$ 中的字

$$0\underbrace{' \cdots '}_{n}.$$

这样,所謂自然数的递归函数只是一种特殊的字母表中的递归函数. 这样,很自然,自然数的递归函数論就包容于我們的递归算法論中了. 也可以采用任意的字母表

$$\mathscr{A} = \{o_1, \cdots, o_k\}. \tag{1}$$

我們只要通过这样一个 $\mathscr{A}$ 中的递归函数 f 来把 $\mathscr{A}$ 中的字集与自然数集作出一一对应. 这个 f 是要具有这样性質,卽序列

$$\odot,\ f(\odot),\ f(f(\odot)),\ \cdots$$

要通过所有 $\mathscr{A}$ 中的字．我們令

$$\begin{cases} f^0(x) =_{df} x, \\ f^{n+1}(x) =_{df} f(f^n(x)), \end{cases}$$

把自然数 n 等同于 $f^n(\odot)$，这样每一个自然数的递归函数就可以看作是一个 $\mathscr{A}$ 中的递归函数，由之自然数的递归函数自然包容于递归算法論中了．这样的 f 有无穷多，例如 §5 中(5)中的 σ，即通过下式定义的 σ

$$\begin{cases} \sigma(\odot) =_{df} o_1 \\ \sigma(xo_i) =_{df} xo_{i+1} \quad 1 \leqslant i < k \\ \sigma(xo_k) =_{df} \sigma(x)o_1 \end{cases}$$

就是这样一个函数．我們在这里也就是把 $\sigma(x)$ 解释作自然数 x 的后継数．有了这样一个后継函数，我們可以用不止一种方法来处理自然数的递归函数．例如，可以如 Kleene[10]那样通过递归式(I)，(II)，(III)，(IV)，(Va)，(Vb)，(VI) 引进一般递归函数概念[1]．这样，自然数的递归函数論就很自然而简单地包容于递归算法論中了．

反之，設字母表(1)已經給定，我們也很容易把 $\mathscr{A}$ 中的递归函数在自然数的递归函数理論中得到表示，例如把 $\mathscr{A}$ 中的字

$$o_{i_n} \cdots o_{i_0} \tag{2}$$

在自然数中予以适当的 Gödel 編碼，即可以把 $\mathscr{A}$ 中的递归函数轉換成自然数的递归函数了．例如，我們在自然数的递归函数論中引入这样的递归函数

$$\begin{cases} pl(o, y) =_{df} \mu z[z \leqslant k \wedge o < z \wedge y \neq 0 \wedge k | 1y - z1] \\ pl(x', y) =_{df} \mu z[z \leqslant k \wedge o < z \wedge rest(x, y) \neq 0 \wedge k | a], \\ \qquad\qquad \text{其中} \quad a = \left| \left[\dfrac{rest(x, y)}{k^{x'}} \right] - z \right| \\ rest(o, y) =_{df} y \dot{-} pl(o, y) \\ rest(x', y) =_{df} rest(x, y) \dot{-} pl(x', y) \cdot k^{x'}, \end{cases} \tag{3}$$

$$len(x) =_{df} \mu y[y \leqslant x \wedge pl(y, x) = 0], \tag{4}$$

$$xy =_{df} (k^{len(y)} \cdot x) + y. \tag{5}$$

我們在自然数的递归函数論中把一个自然数表成以下形式

$$x = i_n \cdot k^n + \cdots + i_1 \cdot k' + i_0 \cdot k^0,$$
$$1 \leqslant i_m \leqslant k, \ m = 0, \cdots, n$$

用来表示(2)，或用作(2)的編碼，以由(3)，(4)，(5)定义的 xy 表示字的連接，这样，所有的 $\mathscr{A}$ 中的递归函数都在自然数的递归函数中得到表达．由此可見，递归算法論也包容于自然数的递归函数論中．因之这两个理論是等价的．

从这里，据已有的事实：例如 Church[12] 与 Kleene[13] 証明了一般递归性与 λ-可定义性是等价的；Turing[14] 証明了 λ-可定义性与可計算性是等价的；Детловс[15] 証明了递归性与用正規算法的可計算性是等价的；由此可見，递归算法論是与自然数的递归函数論、λ-轉换演算、Turing 計算机理論、正規算法論等已有的能行性理論都是等价的．

---

1) 見 Kleene[10]，第三部份．

参 考 文 献

[1] Skolem, T., *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich.* Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisknaturvidenskabelig Klasse 1923, No. 6.

[2] Gödel, K., *On undecidable propositions of formal mathematical systems,* Notes by S. C. Kleene and B. Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study, 1934. Mimeographed, Princeton, N. J.

[3] Kleene, S. C., General recursive functions of natural numbers. *Math. Ann.*, **112** (1936), 727—742.

[4] Kleene, S. C., Recursive predicates and quantifiers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53** (1943), 41—73.

[5] Church, A., The calculi of lambda-conversion. *Annals of Mathematics Studies,* No. 6, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

[6] Turing, A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, **42** (1936—1937), 230—265. Correction, *ibid.*, **43** (1937), 544—546.

[7] Post, E. L., Finite combinatory process-formulation I, *J. Sym. L,* **1** (1936), 103—105.

[8] Марков, А. А., Теория алгорифмов. *Труды Матем. инсти. им. В. А. Стеклова,* **38** (1951), 176—189.

[9] Марков, А. А., Теория алгорифмов. *Труды Матем. инсти. им. В. А. Стеклова,* **42** (1954).

[10] Kleene, S. C., *Introduction to metamathematics.* Princeton, 1952.

[11] Davis, M., *Computability & unsolvability.* N. J. 1958.

[12] Church, A., An unsolvable problem of elementary number theory. *Amer. J. Math.*, **58** (1936), 345—363.

[13] Kleene, S. C., λ-definability and recursiveness. *Duke Math. J.*, **2** (1936), 340—353.

[14] Turing, A. M., Computability and λ-definability. *J. Symbolic Logic,* **2** (1937), 153—163.

[15] Детловс В. К., Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций, *Труды Матем. Инсти. им. В. А. Стеклова,* **52** (1958).

RECURSIVE ALGORITHMS

THEORY OF RECURSIVE ALGORITHMS I

HU SHIH-HUA

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

ABSTRACT

An abstract of this paper in English has been published in *Science Record* **4** (1960), 91—98.

第10卷 第1期 数学学报 Vol. 10, No. 1
1960年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA March, 1960

核函数*

递归算法論II[1)]

胡世華 陸鍾万
(中国科学院数学研究所)

这里所討論的函数仍是有穷字母表

$$\mathscr{A} = \{o_1, \cdots, o_k\}$$

中的函数。我們仍以⊙表示空字(見[1])。

本文定义了一个看来是极狹小的函数集(§1),并証明其中的函数都可以表成一种范式(§2)。此外,还利用这函数集构造了一种正規算法的通用算法与一种图林机器的通用計算机(§3)。

§1. 核函数概念

核函数集是归納定义出的. 定义中用到函数

$$con(x, y, z) = \begin{cases} \odot & \text{当 } x = yz, \\ o_1 & \text{其他情形,} \end{cases}$$

其中的⊙和 o_1 可以分别看作"真"和"假", yz 表示 y 与 z 的連接. 因此,

$$con(x, y, z) = x \veebar yz$$

(連接和 $\veebar$ 均見[1]). 定义中亦須用到代入算子. 通常的代入算子,如 A. Grzegorczyk[2] 所述,是包括由一 n 元函数

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

經过在其中某一变元 x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 处代入常数 a 而得到一 $n-1$ 元函数

$$g(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

的. 但因[2]中所討論的是通常的自然数的函数,并且在所討論的函数集中往往包含后継函数,所以上述的常数的代入可以归結为零的代入. 本文所討論的是字集中的函数,不能归結为空字的代入,而須用到常字的代入. 然而我們又并不使用常字的代入,而仅允許使用常字母的代入. 代入算子的其他部分与通常的代入相同. 这样的代入我們称为**弱代入**算子. 就是說,弱代入包括以下四个算子:

(1) $$S_i(f, g) = h$$

这是指

$$h(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_1, \cdots, y_m, x_{i+1}, \cdots, x_n) =$$
$$= f(x_1, \cdots, x_{i-1}, g(y_1, \cdots, y_m), x_{i+1}, \cdots, x_n),$$

其中的 f, g, h 分别为 $n, m, m+n-1$ 元函数, $1 \leqslant i \leqslant n$.

---

* 1959年11月16日收到.

1) 本文是前篇[1]的續篇. 本文假定[1].

(2) $$S_{ij}(f) = g$$

这是指

$$g(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, o_j, x_{i+1}, \cdots, x_n),$$

其中的f, g分别为n, $n-1$元函数, $1 \leqslant i \leqslant n$, $j = 1, \cdots, k$.

(3) $$C_{ij}(f) = g$$

这是指

$$g(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \cdots, x_n),$$

其中的f和g都是n元函数, $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

(4) $$I_{ij}(f) = g$$

这是指

$$g(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \cdots, x_n),$$

其中的f和g分别为n和$n-1$元函数, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$.

此外,我們还用到拟受囿存在量詞算子

(5) $$\boldsymbol{\exists}_i(f) = g$$

这是指

$$g(x_1, \cdots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \langle \partial x_i \rangle_y f(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= \begin{cases} \odot & \text{当有 } y \text{ 的子字 } x_i, \text{ 使得 } f(x_1, \cdots, x_n) = \odot \\ o_1 & \text{其他情形,} \end{cases}$$

其中的f和g都是n元函数, y是一变元, $i \leqslant n$.

现在我們来给出核函数集的定义.

字母表$\mathscr{A}$中的核函数集$\mathfrak{K}$(或$\mathfrak{K}(\mathscr{A})$)是满足以下条件的最小的函数集:

(1) $con \in \mathfrak{K}$;

(2) $\mathfrak{K}$对于弱代入算子(即S_i, S_{ij}, C_{ij}, I_{ij})是封閉的;

(3) $\mathfrak{K}$对于拟受囿存在量詞$\boldsymbol{\exists}_i$是封閉的.

下面証明两个輔助定理.

輔助定理 1. $\mathfrak{K}$是递归函数集的真子集.

証. 在[1]中已証明連接函数和函数$\succeq$都是递归函数,故

$$con(x, y, z) = x \succeq yz$$

是递归函数. [1]中又証明算子S_i, S_{ij}, C_{ij}, I_{ij}, $\boldsymbol{\exists}_i$都是递归算子. 由此, $\mathfrak{K}$是递归函数的子集.

連接函数显然不是核函数,因为核函数仅取$\odot$或o_1为值,而連接函数的值不限于$\odot$与o_1. 故$\mathfrak{K}$是递归函数集的真子集. 証完.

輔助定理 2. $\mathfrak{K}$中包含一种拟邏輯詞項(定义見証明):

$$\succeq, \sim, \curlywedge, \curlyvee, \rightharpoondown$$

并对于拟受囿全称量詞算子: $\boldsymbol{\forall}_i(f) = g$是封閉的.

証. $$\odot = \langle \partial x \rangle_{o_1} con(x, x, x),$$

$$x \succeq y = con(x, y, \odot),$$

$$\sim x = x \succeq o_1,$$

$$x \curlywedge y = con(\odot, x, y),$$
$$x \curlyvee y = \sim(\sim x \curlywedge \sim y),$$
$$x \rightarrow y = \sim x \curlyvee y,$$
$$\langle x\rangle_y f(x) = \sim \langle \exists x\rangle_y \sim f(x).$$ 証完。

当使用的函数中有拟量詞出現时，我們对于变元亦用約束变元和自由变元的說法，其涵义和謂詞演算中的相同。

§2. 核　范　式

本节要把核函数表成一种范式。

我們采用 S. C. Kleene[3] 的符号来表示一些函数：

$$C_a^n(x_1, \cdots, x_n) = a,\ n \geqslant 1,\ a \text{ 是一常字};$$
$$U_i^n(x_1, \cdots, x_n) = x_i,\ n \geqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

算子

(1)　$$J^n(f, g) = h$$

是指

$$h(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n)g(x_1, \cdots, x_n),$$

即由 n 元函数 f, g 經連接而得到 n 元函数 h 的算子。

由 $C_\odot^n$, $C_{o_j}^n(j = 1, \cdots, k)$, U_i^n 出发，經过有穷次使用算子 J^n 而得到的函数称为并列函数(不要与作为一个函数的連接函数相混)。例如

$$f(x, y, z) = J^3(J^3(J^3(J^3(J^3(U_2^3(x, y, z), C_{o_1}^3(x, y, z)), U_3^3(x, y, z)), C_{o_2}^3(x, y, z)), C_{o_3}^3(x, y, z)), U_1^3(x, y, z))$$
$$= y o_1 z o_2 o_3 x,$$

即是一并列函数。

設

(2)　$$h(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) \veeeq g(x_1, \cdots, x_n),$$

其中的 f 和 g 都是并列函数，则称 h 为一拟等値函数。例如

$$f(x, y, z) = z y o_1 o_1 x \veeeq o_2 y x o_3,$$
$$g(x, y, z) = z y o_1 o_1 x \veeeq \odot,$$

都是拟等値函数。

設

$$g(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1, \cdots, x_n) \curlywedge \cdots \curlywedge f_r(x_1, \cdots, x_n),$$
$$h(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1, \cdots, x_n) \curlyvee \cdots \curlyvee f_r(x_1, \cdots, x_n),$$

则称 g 为 $f_1, \cdots, f_r$ 的拟合取式，h 为 $f_1, \cdots, f_r$ 的拟析取式。

設函数 f 是由拟等値函数的拟析取式(拟合取式)所构成的拟合取式(拟析取式)，则称 f 为一拟合取等値母式(拟析取等値母式)。由拟合取等値母式(拟析取等値母式)經有穷次(可以是零次)使用算子 $\exists_i$ 或 $\forall_i$ 而得出的函数称为拟前束合取核范式函数(拟前束析取核范式函数)。拟前束合取核范式函数具有以下的形式：

(3)　$$\langle Q_1 y_1\rangle_{z_1} \cdots \langle Q_m y_m\rangle_{z_m} [(f_{11} \curlyvee \cdots \curlyvee f_{1n_1}) \curlywedge \cdots \curlywedge (f_{r1} \curlyvee \cdots \curlyvee f_{rn_r})],$$

其中的 $\langle Q_j y_j\rangle_{z_j}$ 表示 $\langle \partial y_j\rangle_{z_j}$ 或 $\langle y_j\rangle_{z_j}$, $j=1,\cdots,m$.

将字母表 $\mathscr{A}$ 中的拟前束合取核范式函数的集記作 $\mathfrak{R}_1$ (或 $\mathfrak{R}_1(\mathscr{A})$)，我們将証明 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1$ (由下面定理 1 和定理 2 的証明容易看出，如果以 $\mathfrak{R}_1$ 或 $\mathfrak{R}_1(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}$ 中的拟前束析取核范式函数的集，亦可以証明 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1$). 为此，我們再定义一函数集 $\mathfrak{R}_2$ (或 $\mathfrak{R}_2(\mathscr{A})$). $\mathfrak{R}_2$ 是包含所有拟等值函数，并封閉于 $\sim$, $\curlywedge$, $\curlyvee$, $\rightharpoondown$, $\mathbf{\exists}_i$, $\mathbf{\forall}_i$ 的最小函数集. 所謂 $\mathfrak{R}_2$ 封閉于 $\sim$, $\curlywedge$ 等,是指

$$f\in\mathfrak{R}_2 \Longrightarrow \sim f\in\mathfrak{R}_2$$
$$f, g\in\mathfrak{R}_2 \Longrightarrow f\curlywedge g\in\mathfrak{R}_2,$$

等等.

輔助定理 3. $cal\in\mathfrak{R}_2$.

証. 只須順序地考察 [1] 中函数 *int, end, in, al, wor, sub, rep1, rep2, rep, lt, rt, el, ef, apl2, apl,* 及 *cal* 的定义,即得 $cal\in\mathfrak{R}_2$.

輔助定理 4. $comp\in\mathfrak{R}_2$.

証. 考察輔助定理 3 的証明中所提到的各函数，以及 [1] 中的函数 *alin, inst, go, comp* 的定义,即得 $comp\in\mathfrak{R}_2$.

定理 1. $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{R}_2$.

証. $\mathfrak{R}_1\subset\mathfrak{R}_2$ 是显然的. 証明 $\mathfrak{R}_2\subset\mathfrak{R}_1$, 即是要把 $\mathfrak{R}_2$ 中的函数 f 变形而表成拟前束合取核范式函数. 变形的过程与謂詞演算中得出前束范式与合取范式的过程是类似的. 先将 f 中的拟量詞移到前面,成为前束詞,在移动拟量詞时用到以下的与謂詞演算中的等价关系类似的等式(4)—(11):

$$\sim\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m} f=\langle \breve{Q}_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle \breve{Q}_m x_m\rangle_{y_m}\sim f, \tag{4}$$

其中的 $\langle\breve{Q}x\rangle_y$ 是

$$\langle\breve{Q}x\rangle_y=\begin{cases}\langle x\rangle_y & \text{当 } \langle Qx\rangle_y=\langle\partial x\rangle_y\\ \langle\partial x\rangle_y & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$f\curlywedge\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m} g=\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m}[f\curlywedge g], \tag{5}$$
$$f\curlyvee\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m} g=\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m}[f\curlyvee g], \tag{6}$$
$$f\rightharpoondown\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m} g=\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m}[f\rightharpoondown g], \tag{7}$$

在(5)—(7)中, $x_1,\cdots,x_m$ 不在 f 中自由出現;

$$\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m} f\curlywedge g=\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m}[f\curlywedge g], \tag{8}$$
$$\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m} f\curlyvee g=\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m}[f\curlyvee g], \tag{9}$$
$$\langle Q_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle Q_m x_m\rangle_{y_m} f\rightharpoondown g=\langle \breve{Q}_1 x_1\rangle_{y_1}\cdots\langle \breve{Q}_m x_m\rangle_{y_m}[f\rightharpoondown g], \tag{10}$$

在(8)—(10)中, $x_1,\cdots,x_m$ 不在 g 中自由出現;

$$\langle Qx\rangle_y f(x)=\langle Qz\rangle_y f(z), \tag{11}$$

在(11)中, z 不在 $f(x)$ 中出現. 然后,根据以下的关系(12)—(17):

$$f\rightharpoondown g=\sim f\curlyvee g, \tag{12}$$
$$\sim(f\curlyvee g)=\sim f\curlywedge\sim g, \tag{13}$$
$$\sim(f\curlywedge g)=\sim f\curlyvee\sim g, \tag{14}$$
$$\sim\sim f=f, \tag{15}$$

$$(16)\qquad f \curlyvee (g \curlywedge h) = (f \curlyvee g) \curlywedge (f \curlyvee h),$$

$$(17)\qquad (f \curlywedge g) \curlyvee h = (f \curlyvee h) \curlywedge (g \curlyvee h).$$

可以将已得到的拟前束范式的母式变形为拟合取范式；但这时，各合取項中的析取項还未必都是拟等值函数，而可能有

$$x \veebar y$$

的形式，它在 $\mathfrak{K}_1$ 的函数中是不允許的；但它可以通过以下两个关系而免去：

$$(18)\qquad x \veebar \odot = \langle \partial y \rangle_x [x \succeq yo_1 \curlyvee \cdots \curlyvee x \succeq yo_k],$$

$$(19)\qquad \begin{cases} x \veebar y = \langle \partial z \rangle_y [y \succeq xz \curlywedge z \veebar \odot] \curlyvee \langle \partial z \rangle_x [x \succeq yz \curlywedge z \veebar \odot] \\ \quad \curlyvee \langle \partial x_1, z \rangle_x \langle \partial y_1 \rangle_y \{x \succeq zo_1 x_1 \curlywedge [y \succeq zo_2 y_1 \curlyvee \cdots \curlyvee y \succeq zo_k y_1] \\ \quad \cdot \curlyvee \cdot x \succeq zo_2 x_1 \curlywedge [y \succeq zo_1 y_1 \curlyvee y \succeq zo_3 y_1 \curlyvee \cdots \curlyvee y = zo_k y_1] \\ \quad \cdot \curlyvee \cdots \\ \quad \cdot \curlyvee \cdot x \succeq zo_k x_1 \curlywedge [y \succeq zo_1 y_1 \curlyvee \cdots \curlyvee y \succeq zo_{k-1} y_1]\}, \end{cases}$$

至此定理 1 証完.

定理 2. $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1$.

証. (*1) $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_1$.

由定理 1，这只須証 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_2$. 分以下六种情形：

(*1.1)　$con(x, y, z) = x \succeq yz \in \mathfrak{K}_2$,

(*1.2)　設 $f, g \in \mathfrak{K}$，并 $\in \mathfrak{K}_2$；又設 $S_i(f, g) = h$. 則

$$h(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_1, \cdots, y_m, x_{i+1}, \cdots, x_n) =$$
$$= f(x_1, \cdots, x_{i-1}, g(y_1, \cdots, y_m), x_{i+1}, \cdots, x_n) =$$
$$= [g(y_1, \cdots, y_m) \curlywedge f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \odot, x_{i+1}, \cdots, x_n)]$$
$$\curlyvee [\sim g(y_1, \cdots, y_m) \curlywedge f(x_1, \cdots, x_{i-1}, o_1, x_{i+1}, \cdots, x_n)] \in \mathfrak{K}_2.$$

(*1.3)　設 $f \in \mathfrak{K}_1$ 并 $\in \mathfrak{K}_2$；又設 $S_{ij}(f) = g$. 則

$$g(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, o_j, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in \mathfrak{K}_2.$$

(*1.4)—(*1.6)　处理由 $\mathfrak{K}$ 中函数 f 經算子 C_{ij}, I_{ij}, $\exists_i$ 而得函数 g 的情形. 在这些情形，当 $f \in \mathfrak{K}_2$ 时，显然有 $g \in \mathfrak{K}_2$.

由(*1.1)—(*1.6)，可知 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1$.

(2) $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}$.

因在构造出 $\mathfrak{K}_1$ 时仅用到拟等值函数及 $\curlywedge$, $\curlyvee$, $\exists_i$, $\forall_i$，而据輔助定理 2，$\mathfrak{K}$ 中包含 $\curlywedge$ 和 $\curlyvee$，并且 $\mathfrak{K}$ 对于 $\exists_i$ 和 $\forall_i$ 是封閉的，故在証(*2)时，只須証明拟等值函数都是核函数即够.

設

$$h(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n) \succeq g(x_1, \cdots, x_n)$$

是拟等值函数，則

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \odot \text{ 或 } f(x_1, \cdots, x_n) = a_1 \cdots a_r,$$
$$g(x_1, \cdots, x_n) = \odot \text{ 或 } g(x_1, \cdots, x_n) = b_1 \cdots b_s,$$

其中的 $a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_s$ 或者是 x_i $(i = 1, \cdots, n)$ 或者是 o_j $(j = 1, \cdots, k)$. 分三种情形証明 $h \in \mathfrak{K}$.

(2.1) f, g 都是 $\odot$, 则

$$h(x_1, \cdots, x_n) = con(\odot, \odot, \odot) \in \mathfrak{R}.$$

(2.2) f, g 中有一是 $\odot$, 另一不是$\odot$, 例如 $f = \odot, g \neq \odot$, 则

$$\begin{aligned} h(x_1, \cdots, x_n) &= \odot \veebar b_1 \cdots b_s \\ &= b_1 \veebar \odot \curlywedge \cdots \curlywedge b_s \veebar \odot \\ &= con(b_1, \odot, \odot) \curlywedge \cdots \curlywedge con(b_s, \odot, \odot) \in \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

(2.3) f, g 都不是 $\odot$. 則

$$h(x_1, \cdots, x_n) = a_1 \cdots a_r \veebar b_1 \cdots b_s.$$

这要双重地施归納于 r 和 s 来証明 $h \in \mathfrak{R}$.

先施归納于 r. 第一步基始, $r = 1$: 証

$$a_1 \veebar b_1 \cdots b_s \in \mathfrak{R}. \tag{20}$$

証(20)时又施归納于 s. 当 $s = 1$ 时,有

$$a_1 \veebar b_1 = con(a_1, b_1, \odot) \in \mathfrak{R}. \tag{21}$$

設

$$a_1 \veebar b_1 \cdots b_s \in \mathfrak{R},$$

則由之有

$$a_1 \veebar b_1 \cdots b_{s+1} = \langle \partial y \rangle_{a_1} [y \veebar b_1 \cdots b_s \curlywedge con(a_1, y, a_{s+1})] \in \mathfrak{R}; \tag{22}$$

由(21)与(22),即証明了(20).

施归納于 r 的第二步:設

$$a_1 \cdots a_r \veebar b_1 \cdots b_s \in \mathfrak{R},$$

則由之可得

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdots a_r a_{r+1} \veebar b_1 \cdots b_s = &\langle \partial y, z \rangle_{b_s} [b_s \veebar yz \curlywedge a_{r+1} \veebar z \curlywedge a_1 \cdots a_r \veebar b_1 \cdots b_{s-1} y] \\ &\curlyvee \langle \partial y, z \rangle_{b_{s-1}} [b_{s-1} \veebar yz \curlywedge a_{r+1} \veebar zb_s \curlywedge a_1 \cdots a_r \veebar b_1 \cdots b_{s-2} y] \\ &\curlyvee \cdots \\ &\curlyvee \langle \partial y, z \rangle_{b_1} [b_1 \veebar yz \curlywedge a_{r+1} \veebar zb_2 \cdots b_s \curlywedge a_1 \cdots a_r \veebar y] \in \mathfrak{R}; \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

由(20)与(23)即有(*2.3).

由(*2.1)—(*2.3),可知 $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$; 定理 2 証完.

§3. 一种通用算法与通用計算机的構造

在[1]中胡世华使用 $las(x)$ 这样一个函数:当 x 有

$$x = z \square y \square \tag{1}$$

形式,而 y 中不再有□出现时,則有

$$las(x) = y; \tag{2}$$

否則 $las(x)$ 无定义. 故 las 是一偏函数.

由[1]中定理 1 的証明及本文輔助定理 3, 定理 1, 定理 2, 以下的定理 3 显然是成立的.

定理 3. 对于任何字母表 $\mathscr{A}$, 存在着 $\mathscr{A}$ 的扩大字母表 $\mathscr{A}_1$ ($\mathscr{A}_1$ 包含不在 $\mathscr{A}$ 中的字母□)中的三元的核函数 f,使得任何 $\mathscr{A}$ 中的正規算法 $\mathfrak{A}$ 都能表成

$$\mathfrak{A}(x) \simeq las(\langle \varepsilon y \rangle f(y, x, a)),$$

其中的 a 是一仅依赖于 $\mathfrak{A}$ 的 $\mathscr{A}_1$ 中的字.

据 A. A. Марков[4], 不难証明以下的結果(3)—(8):

可找到正規算法 $\mathfrak{A}$, 使

(3) $$\mathfrak{A}(x * y * z) \simeq con(x, y, z),$$

在 x, y, z 中沒有 $*$ 出現.

設 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ 是正規算法,則可找到正規算法 $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_i(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$$

使

(4) $$\begin{cases} \mathfrak{B}(x_1 * \cdots * x_{i-1} * y_1 * \cdots * y_m * x_{i+1} * \cdots * x_n) \simeq \\ \simeq \mathfrak{A}_1(x_1 * \cdots * x_{i-1} * \mathfrak{A}_2(y_1 * \cdots * y_m) * x_{i+1} * \cdots * x_n), \end{cases}$$

在 $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$ 中沒有 $*$ 出現.

設 $\mathfrak{A}$ 是正規算法,则可以找到正規算法 $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{A}_{\ominus_i}$ 使以下的(5)—(8)成立:

(5) $$\mathfrak{B}_1(x_1 * \cdots * x_{i-1} * x_{i+1} * \cdots * x_n) \simeq \mathfrak{A}(x_1 * \cdots * x_{i-1} * o_j * x_{i+1} * \cdots * x_n),$$

其中 $*$ 不在 $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$ 中出現;

(6) $$\mathfrak{B}_2(x_1 * \cdots * x_n) \simeq \mathfrak{A}(x_1 * \cdots * x_{i-1} * x_j * x_{i+1} * \cdots * x_{j-1} * x_i * x_{j+1} * \cdots * x_n),$$

其中 $*$ 不在 $x_1, \cdots, x_n$ 中出現;

(7) $$\mathfrak{B}_3(x_1 * \cdots * x_{i-1} * x_{i+1} * \cdots * x_n) \simeq \mathfrak{A}(x_1 * \cdots * x_{i-1} * x_j * x_{i+1} * \cdots * x_n),$$

其中 $*$ 不在 $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$ 中出現;

(8) $$\mathfrak{A}_{\ominus_i}(x_1 * \cdots * x_n) \simeq \begin{cases} \odot \text{ 当有 } x_i \text{ 的子字 } y, \text{ 使} \\ \quad \mathfrak{A}(x_1 * \cdots * x_{i-1} * y * x_{i+1} * \cdots * x_n) = \odot, \\ o_1 \text{ 其他情形}, \end{cases}$$

其中 $*$ 不在 $x_1, \cdots, x_n$ 中出現. 我們可以写:

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{S}_{ij}(\mathfrak{A}),$$
$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_{ij}(\mathfrak{A}),$$
$$\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{I}_{ij}(\mathfrak{A}).$$

由(3)—(8)可知核函数都有正規算法,故有正規算法 $\mathfrak{B}_4$, 使

(9) $$\mathfrak{B}_4(x * y * z) \simeq cal(x, y, z),$$

在 x, y, z 中沒有 $*$ 出現. 对于函数 las, 亦可以找到正規算法 $\mathfrak{B}_5$, 使

(10) $$\mathfrak{B}_5(x) \simeq las(x).$$

此外, 由于任何正規算法 $\mathfrak{A}$ 与递归算子 $\langle \varepsilon x \rangle$, 亦可以找到正規算法 $\mathfrak{A}_\varepsilon$, 使得当存在滿足 $\mathfrak{A}(z * x * y) = \odot$ 的 z 时,

(11) $$\mathfrak{A}_\varepsilon(x * y) \simeq \text{滿足 } \mathfrak{A}(z * x * y) = \odot \text{ 的 } \varepsilon z;$$

如果不存在滿足 $\mathfrak{A}(z * x * y) = \odot$ 的 z, 則 $\mathfrak{A}_\varepsilon(x * y)$ 无意义. 我們可以写

$$\mathfrak{A}_\varepsilon(x * y) = \langle \varepsilon z \rangle \mathfrak{A}(z * x * y).$$

据定理 3 及(9)—(11),任何 $\mathscr{A}$ 中的正規算法 $\mathfrak{A}$ 可以表成

$$\mathfrak{A}(x) \simeq \mathfrak{B}_5(\langle \varepsilon y \rangle \mathfrak{B}_4(y * x * a)).$$

如果令 $\mathfrak{B}'$ 是这样一个正規算法:

$$\mathfrak{B}'(x*z) \simeq \mathfrak{B}_5(\langle \varepsilon y \rangle \mathfrak{B}_4(y*x*z)),$$

则 $\mathfrak{B}'$ 显然是一种通用算法，它是一 $\mathscr{A}$ 的扩大字母表中的正规算法，使得任何 $\mathscr{A}$ 中的正规算法 $\mathfrak{A}$ 可表成

$$\mathfrak{A}(x) \simeq \mathfrak{B}'(x*a),$$

其中 a 是一仅依赖于 $\mathfrak{A}$ 的常字. $\mathfrak{B}'$ 的构造是比較簡单的.

下面我們构造一种通用計算机. 在[1]中証明了：任何图林机器 T，有递归函数 res_T，使

(12) $$res_T(x) = las(\langle \varepsilon y \rangle comp(y, x, T, S, Q)),$$

其中

$$S = s_0 \cdots s_m,$$
$$Q = q_1 \cdots q_n,$$

而 $s_0, \cdots, s_m$ 是 T 的机器符号，$q_1, \cdots, q_n$ 是 T 的內部状态，las, $comp$ 是在字母表

(13) $$\{s_0, \cdots, s_m, q_1, \cdots, q_n, R, L, \square\}$$

中的函数. 我們可以将(13)稍作改变，取不在其中的字母，如 $|$ 与 q，从而将 q_i 記作

$$q\underbrace{|\cdots|}_{i\text{个}},$$

则(3)可改为字母表

$$\mathscr{A}(S) = \{s_0, \cdots, s_m, q, |, R, L, \square\};$$

从而可以将[1]中的函数 $alin$, $inst$, go, $comp$ 改为 $\mathscr{A}(S)$ 中的函数. 由之可得

定理 4. 給定字母表 $\mathscr{A}(S)$，其中

$S = s_0, \cdots, s_m$, $s_i(i = 0, \cdots, m)$ 是机器符号，存在一 $\mathscr{A}(S)$ 中的三元核函数 f，使得：任何以 $s_0, \cdots, s_m$ 为机器符号的图林机器 T，有

(14) $$res_T(x) = las(\langle \varepsilon y \rangle f(y, x, t)),$$

其中 t 是一仅依赖于 T 的 $\mathscr{A}(S)$ 中的字.

証. 由[1]中定理 2 及本文輔助定理 4、定理 1、定理 2，即得本定理；(4)中的函数 f 可由 $comp$ 經代入而得：

$$f(y, x, z) = comp(y, x, z, S, q|).$$

令

$$\mathscr{A}^*(S) = \mathscr{A}(S) \smile \{*\}.$$

则可以构造与 $alin$, $inst$, go, $comp$ 相应的函数 $alin^*$, $inst^*$, go^*, $comp^*$；这些函数都是字母表 $\mathscr{A}^*(S)$ 中的核函数，它們与不带 $*$ 号的相应各函数的不同之处在于它們都是一元函数，并且是在 $\mathscr{A}^*(S)$ 中有定义的. 但如果 x, y, z, u_1, u_2 都只取 $\mathscr{A}(S)$ 中的字为值时，则有

$$alin(x, y) = alin^*(x*y),$$
$$inst(x, u_1, u_2) = inst^*(x*u_1*u_2),$$
$$go(x, y, z, u_1, u_2) = go^*(x*y*z*u_1*u_2),$$
$$comp(x, y, z, u_1, u_2) = comp^*(x*y*z*u_1*u_2).$$

由此可以将定理 4 写成以下的形式

定理 4′. 給定字母表 $\mathscr{A}(S)$，其中

$$S = s_0, \cdots, s_m,\ s_i\ (i = 0, \cdots, m)\ \text{为机器符号},$$

存在一 $\mathscr{A}^*(S)$ 中的一元核函数 f，使得：对任何以 $s_0, \cdots, s_m$ 为机器符号的图林机器 T，有

$$res_T(x) = las\,(\langle \varepsilon y \rangle f\,(y * x * t)). \tag{15}$$

其中的 t 是一仅依赖于 T 的 $\mathscr{A}(S)$ 中的字.

令

$$g(x * z) = las\,(\langle \varepsilon y \rangle f(y * x * z)),$$

则由(15)，可得

$$res_T(x) = g(x * t). \tag{16}$$

設 U 是計算 g 的图林机器，则由(16)得

$$res_T(x) = res_U\,(x * t),$$

其中的 t 是一个仅依赖于 T 的常字. 这說明 U 是一通用計算机，而 U 的构造亦是較为簡单的.

参　考　文　献

[1] 胡世华：递归算法——递归算法論 I. 数学学报，**10** (1960).
[2] Grzegorczyk, A., Some classes of recursive functions. *Rozprawy Matematyczne*, **4** (1953), 1—45.
[3] Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, 1952.
[4] Марков, A. A., *Теория алгорифмов*, 1954.

KERNEL FUNCTIONS

THEORY OF RECURSIVE ALGORITHMS II

Hu Shih-hua and Loh Chung-wan
(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

Abstract

An abstract in English of this paper has been published in *Science Record* **4** (1960), 99—101, where it is put together with the abstract of another paper: Normal Forms of Recursive Functions.

第10卷 第1期 数学学报 Vol. 10, No. 1
1960年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA March, 1960

递归函数的范式*

遞归算法論 III[1)]

胡世華
(中国科学院数学研究所)

§1. 引言

自然数的递归函数可以表成范式. S. C. Kleene[3] 証明自然数的递归函数可表成范式

$$\text{(K)}\qquad f(x_1,\cdots,x_n)=U\mu y[T_n(m,x_1,\cdots,x_n,y)=0],$$

其中的U与T_n都是独立于f的原始递归函数,m是一仅依赖于f的常数. U和T_n又可以只是初等函数(見[4]).

A. Grzegorczyk[5] 将递归函数表成范式

$$\text{(G)}\qquad f(x_1,\cdots,x_n)=Ely[g(x_1,\cdots,x_n,y)=0],$$

其中的E是独立于f的$\mathscr{E}^0$中的函数,g亦是$\mathscr{E}^0$中的函数,$\mathscr{E}^0$是比初等函数集还要狹小得多的函数集.

莫紹揆[6]証明(G)中的函数可以限于$\mathscr{D}$,$\mathscr{D}$是$\mathscr{E}^0$的子集(可能是眞子集);并且可将递归函数表成

$$f(x_1,\cdots,x_n)=Aly[B(m,x_1,\cdots,x_n,y)=0]$$

其中的A与B都是独立于f的$\mathscr{D}$中的函数,m是一仅依賴于f的常数.

胡世华与陆鍾万[7]将递归函数表成与(K),(G)等价的另一种型式的范式

$$\text{(N)}\qquad f(x_1,\cdots,x_n)=lx\{(\exists y)[g(m,x,x_1,\cdots,x_n,y)=0]\},$$

其中的g是独立于f的$\mathscr{A}$中的函数,m是一仅依賴于f的常数,$\mathscr{A}$则是$\mathscr{D}$的极狹小的眞子集. [7]中并将递归函数表为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=Ely[g(m,x_1,\cdots,x_n,y)=0],$$

其中的E卽是(G)中的E,g則是独立于f的$\mathscr{A}$中的函数,m是一仅依賴于f的常数.

自然数的递归函数的范式問題的研究,使其中所用的函数限于更为狹小的函数集,这就意味着可将递归函数的計算归結为更簡单更少的函数的計算. 自然数递归函数的范式从[5]起有了很大的改进. [7]中指出范式的方括号中的函数可以限于只取0或1为值的函数. 范式的进一步改进,是存在着相当大的可能性的.

本文要将字母表

$$\mathscr{A}=\{o_1,\cdots,o_k\}$$

---

* 1959年11月16日收到.

1) 本文是前两篇[1],[2]的續篇. 本文假定[1],[2].

中的递归函数(見[1])表成范式，并指出范式中的函数可限于极为狭小的核函数(見[2])，使核函数集进一步变得更狹，似乎是比較不容易的．本文还給出了 $\mathscr{A}$ 中递归函数的归納定义．

本文中以 $\mathscr{A}$ 表示上述的字母表，不与[7]中的函数集 $\mathscr{A}$ 相混，本文中不再用到[7]中的函数集 $\mathscr{A}$．

§2. 范 式 定 理

下面我們要用到递归算子 $\langle \varepsilon x\rangle$．(見[1])

定理 1 (范式定理)． 对于給定的字母表 $\mathscr{A}$，自然数 n，存在着 $\mathscr{A}$ 的扩大字母表 $\mathscr{A}_1$ 及函数 g, h_n, h，使得：任何 $\mathscr{A}$ 中的 n 元递归函数 f 都可以表成

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \langle \iota u\rangle\langle \partial x\rangle g(x,u,x_1,\cdots,x_n,a) = \iota u\{(\exists x)[g(x,u,x_1,\cdots,x_n,a) = \odot]\} \quad (1)$$

与

$$f(x_1,\cdots,x_n) = h(\langle \varepsilon x\rangle h_n(x,x_1,\cdots,x_n,a)) = h(\varepsilon x[h_n(x,x_1,\cdots,x_n,a) = \odot]), \quad (2)$$

其中的 a 是一仅依赖于 f 的 $\mathscr{A}_1$ 中的常字，g 是一 $\mathfrak{K}(\mathscr{A}_1)$ 中的 $n+3$ 元函数，h_n 是一 $\mathfrak{K}(\mathscr{A}_1)$ 中的 $n+2$ 元函数，h 是满足

$$h(x) = \langle \varepsilon u\rangle g_1(u,x), \quad g_1 \in \mathfrak{K}(\mathscr{A}_1) \quad (3)$$

与

$$h(x) \text{ 是 } x \text{ 的子字} \quad (4)$$

的一元函数 ($\mathfrak{K}(\mathscr{A}_1)$ 即 $\mathscr{A}_1$ 中的核函数集[2])．

証． 設所給的字母表为

$$\mathscr{A} = \{o_1,\cdots,o_k\},$$

令所要求的扩大字母表为

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A} \cup \{\alpha, \mathrm{f}, |, \langle, \rangle, \text{，}, =, \square, \square_1\}.$$

当定义递归算法时，要用到新的字母，由之定义出項与等式．我們卽用 $\mathscr{A}_1$ 中的字母来构成項与等式．令

$$\alpha, \alpha 1, \alpha||, \cdots$$

表示变元字母．又令

$$\mathrm{f}, \mathrm{f}1, \mathrm{f}||, \cdots$$

表示函数字母．在其余的字母中，$\square$ 是用来构成字的有穷序列的，$\square_1$ 是用来构成另一种有穷序列的，下面再加以說明．

定理中的 a 可看成就是定义 f 的递归算法．我們将递归算法中的等式用字母 $\square$ 加以隔开而写成一个序列．如果以 a 表示这个序列，則 a 在这里成为 $\mathscr{A}_1$ 中的一个字．

在下面的証明中要用到在 [2] 中已經証明了的以下的結果：$\mathfrak{K}(\mathscr{A}_1)$ 中包含函数 $\veebar$，$\sim, \curlywedge, \curlyvee, \neg$；$\mathfrak{K}(\mathscr{A}_1)$ 对于算子 $\mathbf{V}_i$ 是封閉的；拟等値函数都属于 $\mathfrak{K}(\mathscr{A}_1)$．

我們引进以下的一系列函数 (5)—(20)，从这些函数的定义容易看出它們都是

$\mathfrak{R}(\mathscr{A}_1)$ 中的函数;通过这些函数即可証明本定理.

(5)
$$al(x)=\begin{cases}\odot & \text{当 } x \text{ 是 } \mathscr{A}_1 \text{ 中的字母,}\\ o_1 & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$al(x)=x \not\underline{\smile} \odot \curlywedge \langle x_1,x_2\rangle_x[x \underline{\smile} x_1x_2 \rightarrow x_1 \underline{\smile} \odot \curlyvee x_2 \underline{\smile} \odot];$$

(6)
$$int(x,y)=\begin{cases}\odot & \text{当 } x \text{ 是 } y \text{ 的左端,}\\ o_1 & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$int(x,y)=\langle \partial x_1\rangle_y[y \underline{\smile} xx_1].$$

(7)
$$in(x,y)=\begin{cases}\odot & \text{当 } x \text{ 在 } y \text{ 中出現,}\\ o_1 & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$in(x,y)=\langle \partial x_1,x_2\rangle_y[y \underline{\smile} x_1xx_2];$$

(8)
$$wor(x,y)=\begin{cases}\odot & \text{当 } x \text{ 的字母都在 } y \text{ 中出現,}\\ o_1 & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$wor(x,y)=\langle z\rangle_x[al(z)\rightarrow in(z,y)];$$

(9)
$$var(x)=\begin{cases}\odot & \text{当 } x \text{ 是一变元字母,}\\ o_1 & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$var(x)=\langle \partial y\rangle_x[x \underline{\smile} \alpha y \curlywedge wor(y,1)];$$

(10)
$$fun(x)=\begin{cases}\odot & \text{当 } x \text{ 是一函数字母,}\\ o_1 & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$fun(x)=\langle \partial y\rangle_x[x=\mathrm{f}y \curlywedge wor(y,1)].$$

以下我們即以 A 表示字

$$o_1\cdots o_k.$$

(11)
$$sc(x)=\begin{cases}\odot & \text{当 } x \text{ 是一簡单常項,即 } x \text{ 有 } \mathrm{f}_i\langle x_1\mathbf{,}\cdots\mathbf{,}x_n\rangle \text{, 即 } \mathrm{f}|\cdots|\langle x_1\mathbf{,}\cdots\mathbf{,}x_n\rangle \text{ 形式, 而 } x_i(i=1,\cdots,n) \text{ 中的字母是 } \mathscr{A} \text{ 中的元,}\\ o_1 & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$sc(x)=\langle \partial y,z\rangle_x[x \underline{\smile} y\langle z\rangle \curlywedge fun(y) \curlywedge wor(z,A\mathbf{,})].$$

(12)
$$subseq(x,y,z_1,z_2)=\begin{cases}\odot & \text{当 } x \text{ 是一个由字母 } \square_1 \text{ 隔成的有穷序列, 它由 } y \text{ 开始, 逐步将其中的变元字母 } z_1 \text{ 的一个出現代之以 } \mathscr{A} \text{ 中的字 } z_2\text{, 一直到在其中不再有 } z_1 \text{ 出現为止. (例如}\\ & x=\square_1 y\square_1\cdots\square_1 x_i\square_1 x_{i+1}\square_1\cdots\square_1 x_n\square_1,\\ & \text{其中 } x_{i+1} \text{ 是由 } x_i \text{ 将 } x_i \text{ 中变元字母 } z_1 \text{ 的一个出現代之以字 } z_2 \text{ 而得, 而 } x_n \text{ 中不再有 } z_1 \text{ 出現),}\\ o_1 & \text{其他情形;}\end{cases}$$

$$subseq(x,y,z_1,z_2) = \sim in(\Box,x) \curlywedge var(z_1) \curlywedge wor(z_2,A)$$
$$\curlywedge \langle \partial x_1\rangle_x [x \succeq \Box_1 y \Box_1 x_1]$$
$$\curlywedge \langle x_1,x_2,y_1,y_2\rangle_x \langle \partial z_1,z_2,z_3,z_4\rangle_x$$
$$[x \succeq x_1\Box_1 y_1 \Box_1 y_2 \Box_1 x_2 \Box_1 \curlywedge \sim in(\Box_1,y_1) \curlywedge \sim in(\Box_1,y_2)$$
$$\rightarrow y_1 \succeq z_3 z_1 z_4 \curlywedge \sim int(1,z_4) \curlywedge y_2 \succeq z_3 z_2 z_4]$$
$$\curlywedge \langle \partial x_1,x_2\rangle_x [x \succeq x_1 \Box_1 x_2 \Box_1 \curlywedge \sim in(\Box_1,x_2) \curlywedge \sim in(z_1,x_2)].$$

(13)　$rep(x,y,z) = \begin{cases} \odot & \text{当 } x \text{ 是由 } y \text{（大前提）与 } z \text{（小前提）經替换而得；} \\ & \text{即 } x \text{ 是由不包含变元字母的等式 } y\text{，将在 } y \text{ 中等号右边出现的一个有 } f_i\langle a_1,\cdots,a_n\rangle \text{ 形式的部分替之以 } a \text{ 而得，而 } z \text{ 即是等式 } f_i\langle a_1,\cdots,a_n\rangle = a\text{，其中的 } a_1,\cdots,a_n,a \text{ 都是 } \mathscr{A} \text{ 中的字，} \\ o_1 & \text{其他情形；} \end{cases}$

$$rep(x,y,z) = \langle \partial x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\rangle_y \langle \partial x_6\rangle_x$$
$$[\sim in(a,y) \curlywedge y \succeq (x_1 = x_2 x_3 \langle x_4\rangle x_5)$$
$$\curlywedge x \succeq (x_1 = x_2 x_6 x_5) \curlywedge z \succeq (x_3\langle x_4\rangle = x_6)$$
$$\curlywedge fun(x_3) \curlywedge wor(x_4, A,) \curlywedge wor(x_6,A)].$$

在以下的(14)—(17)中，令 c,d 表示字母.

(14)　$beg_c(x,y) = \begin{cases} \odot & \text{当 } y \text{ 是由 } c \text{ 隔开而成的，而 } x \text{ 是 } y \text{ 的首項，} \\ o_1 & \text{其他情形；} \end{cases}$

$$beg_c(x,y) = \langle \partial x_1\rangle_y [y \succeq cxcx_1 \curlywedge \sim in(c,x)];$$

(15)　$las_c(x,y) = \begin{cases} \odot & \text{当 } y \text{ 是由 } c \text{ 隔开而成的，而 } x \text{ 是 } y \text{ 的末項，} \\ o_1 & \text{其他情形；} \end{cases}$

$$las_c(x,y) = \langle \partial x_1\rangle_y [y \succeq x_1 cxc \curlywedge \sim in(c,x)].$$

(16)　$lb_{cd}(x,y) = \begin{cases} \odot & \text{当 } x \text{ 的以 } c \text{ 隔开的末項即是 } y \text{ 的以 } d \text{ 隔开的首項，} \\ o_1 & \text{其他情形；} \end{cases}$

$$lb_{cd}(x,y) = \langle \partial z\rangle_x [las_c(z,x) \curlywedge beg_d(z,y)];$$

(17)　$tin_c(x,y) = \begin{cases} \odot & \text{当 } x \text{ 是以 } c \text{ 隔开的 } y \text{ 中的一个項，} \\ o_1 & \text{其他情形；} \end{cases}$

$$tin_c(x,y) = \langle \partial x_1,x_2\rangle_y [y \succeq x_1 cxcx_2 \curlywedge \sim in(c,x)];$$

(18)　$com(x,z) = \begin{cases} \odot & \text{当 } x \text{ 是（递归算法）} z \text{ 的一个計算，} \\ o_1 & \text{其他情形；} \end{cases}$

$$com(x,z) = \langle \partial x_1\rangle_x [x \succeq \Box x_1 \Box]$$
$$\curlywedge \langle x_1,x_2,x_3\rangle_x [x \succeq x_1 \Box x_2 \Box x_3 \curlywedge \sim in(\Box,x_2)$$
$$\rightarrow tin_{\Box}(x_2,z)$$
$$\curlyvee \langle \partial y\rangle_{x_1} \langle \partial z_1\rangle_y \langle \partial z_2\rangle_{x_2} [subseq(x_2,y,z_1,z_2)$$
$$\curlywedge tin_{\Box}(y,x_1\Box) \curlywedge lb_{\Box\Box}(x_2,\Box x_3)]$$
$$\curlyvee \langle \partial y,z_1\rangle_{x_1} [rep(x_2,y,z_1) \curlywedge tin_{\Box}(y,x_1\Box) \curlywedge tin_{\Box}(z_1,x_1\Box)]].$$

$$
\text{(19)} \quad compu_n(x,u,x_1,\cdots,x_n,z) = \begin{cases} \odot & \text{当 } x \text{ 是(递归算法) } z \text{ 的一个計算,} \\ & \text{計算的末項是一有形式} \\ & \quad f_i\langle x_1 , \cdots , x_n\rangle = u \\ & \text{的等式,其中的 } x_1,\cdots,x_n, u \text{ 都是} \\ & \mathscr{A} \text{ 中的字,} \\ o_1 & \text{其他情形;} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
compu_n(x,u,x_1,\cdots,x_n,z) &= com(x,z) \\
&\curlywedge \langle\partial y\rangle_x\langle\partial z_1,u_1,u_2\rangle_z[las_\square(y,x) \curlywedge y \succeq (u_1\langle x_1 , \cdots , x_n\rangle = u) \\
&\curlywedge wor(u,A) \curlywedge las_\square(z_1,z) \curlywedge z_1 \succeq u_1u_2 \\
&\curlywedge \sim int(1,u_2) \curlywedge fun(u_1)].
\end{aligned}
$$

以上的定义(5)—(19)中用到的一些函数,象(11)中的 $wor(z,A ,)$, (18)中的 $tin_\square(y,x_1\square)$, $lb_{\square_1\square}(x_2,\square x_3)$ 等,可以通过下面的改写而看出它們是 $\mathfrak{R}(\mathscr{A}_1)$ 中的函数:

$$
\begin{aligned}
wor(z,A ,) &= \langle x\rangle_z[al(x) \rightarrow x \succeq o_1 \curlyvee \cdots \curlyvee x \succeq o_k \curlyvee x \succeq ,], \\
tin_\square(y,x_1\square) &= \langle\partial x_4\rangle_x[x_4 \succeq x_1\square \curlywedge tin_\square(y,x_4)], \\
lb_{\square_1\square}(x_2,\square x_3) &= \langle\partial x_4\rangle_x[x_4 \succeq \square x_3 \curlywedge lb_{\square_1\square}(x_2,x_4)].
\end{aligned}
$$

現在假設 $\mathfrak{A}$ 是定义本定理中的 n 元函数 f 的递归算法:

$$\mathfrak{A} = E_1,\cdots,E_r.$$

令

$$a = \square E_1\square\cdots\square E_r\square,$$

其中的 $E_i (i = 1,\cdots,r)$ 由 $\mathscr{A}_1$ 中字母构成,則 a 卽是一仅依賴于 f 的 $\mathscr{A}_1$ 中的字,且有

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \langle \iota u\rangle\langle\partial x\rangle compu_n(x,u,x_1,\cdots,x_n,a),$$

其中的 $compu_n$, 由(19)可以知道,是一个 $\mathfrak{R}(\mathscr{A}_1)$ 中的 $n+3$ 元函数. 由此証明了本定理中的(1).

为了証明(2),令

$$\text{(20)} \quad comp_n(x,x_1,\cdots,x_n,z) = \langle\partial u\rangle_x compu_n(x,u,x_1,\cdots,x_n,z),$$

$$\text{(21)} \quad resul(x) = \langle\varepsilon u\rangle\langle\partial y,y_1\rangle_x[las_\square(y,x) \curlywedge y \succeq y_1 = u],$$

則有

$$f(x_1,\cdots,x_n) = resul(\langle\varepsilon x\rangle comp_n(x,x_1,\cdots,x_n,a)),$$

其中的 $comp_n$, 由(20)可以知道,是一个 $\mathfrak{R}(\mathscr{A}_1)$ 中的 $n+2$ 元函数,其中的 $resul$, 由(21)可以知道,是由 $\mathfrak{R}(\mathscr{A}_1)$ 中的函数

$$g(u,x) = \langle\partial y,y_1\rangle_x[las_\square(y,x) \curlywedge y \succeq y_1 = u]$$

經算子 $\langle\varepsilon u\rangle$ 而得到的,并且显然滿足

$$in(resul(x),x) = \odot.$$

因此(2)成立. 至此定理1 証完.

在扩大字母表 $\mathscr{A}_1$ 中,使用了 $\mathscr{A}$ 以外的九个字母,这是为了方便. 減少一些字母是完全可以的. 例如,通过以下的定义卽可以省去 $\square$ 和 $\square_1$:

$$\square = {}_{af}\langle f\rangle,$$

$$\square_1 = {}_{af}\langle ff\rangle.$$

将 $\mathscr{A}_1$ 中的字母再加以簡省，以至于簡省到它即是 $\mathscr{A}$ 而不再扩大，也都是可以实现的；例如通过类似于 Gödel 配数的方法可以把 $\mathscr{A}_1$ 中的字对应为 $\mathscr{A}$ 中的字．这样做可能是不簡单的，但并无原則上的困难．

§3. 递归函数的归納定义

給定字母表 $\mathscr{A}$ 及一递归算子 $\langle \varepsilon x \rangle$.

設 $\mathfrak{R}_\varepsilon(\mathscr{A})$，或在不引起誤会时就簡写为 $\mathfrak{R}_\varepsilon$，为以 *con* 为开始函数，以弱代入、$\langle \partial x \rangle_y$、$\langle \varepsilon x \rangle$ 为算子而归納定义出的函数集，其中的元是定义在 $\mathscr{A}$ 的字集中的函数．$\mathfrak{R}_\varepsilon(\mathscr{A})$ 亦就是包含 $\mathfrak{K}(\mathscr{A})$ 中的函数，并封閉于算子 $\langle \varepsilon x \rangle$ 的最小函数集．

定理 2. 任何字母表 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 中的递归函数集即为 $\mathfrak{R}_\varepsilon(\mathscr{A})$.

証. 由定理 1，$\mathscr{A}$ 中的递归函数 f 可表为

$$f(x_1, \cdots, x_n) = h(\langle \varepsilon x \rangle h_n(x, x_1, \cdots, x_n, a)), \tag{1}$$

我們令其中的 $\langle \varepsilon x \rangle$ 即是定义 $\mathfrak{R}_\varepsilon(\mathscr{A})$ 时所用到的算子 $\langle \varepsilon x \rangle$.

h_n 是 $\mathfrak{K}(\mathscr{A}_1)$ 中的函数，h 亦是由 $\mathfrak{K}(\mathscr{A}_1)$ 中的函数經 $\langle \varepsilon x \rangle$ 而得的，$\mathscr{A}_1$ 即定理 1 中所説的 $\mathscr{A}$ 的扩大字母表．但前面說过，$\mathscr{A}_1$ 是可以替換成 $\mathscr{A}$ 本身的．这样即有 $h_n \in \mathfrak{K}(\mathscr{A})$，从而 $h_n \in \mathfrak{R}_\varepsilon(\mathscr{A})$，并且 $\langle \varepsilon x \rangle h_n \in \mathfrak{R}_\varepsilon(\mathscr{A})$．又因 h 是可由 $\mathfrak{K}(\mathscr{A})$ 中函数經 $\langle \varepsilon x \rangle$ 而得，故 $h \in \mathfrak{R}_\varepsilon(\mathscr{A})$．因此最后得

$$f(x_1, \cdots, x_n) = h(\langle \varepsilon x \rangle h_n(x, x_1, \cdots, x_n, a)) \in \mathfrak{R}_\varepsilon(\mathscr{A}).$$

反过来，$\mathfrak{R}_\varepsilon(\mathscr{A})$ 中的函数显然都是 $\mathscr{A}$ 中的递归函数；因此定理 2 得証．

参　考　文　献

[1] 胡世华：递归算法（递归算法論 I）．数学学报，**10** (1960)，66—87.
[2] 胡世华与陆鍾万：核函数（递归算法論 II）．数学学报，**10** (1960)，89—97.
[3] Kleene, S. C., Recursive predicates and quantifiers. *Trans. of Amer. Math. Soc.*, **53** (1943), 41—73.
[4] Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, 1952.
[5] Grzegorczyk, A., Some classes of recursive functions. *Rozprawy Matematyczne*, **4** (1953), 1—45.
[6] 莫紹揆：一般递归函数的构成．数学学报，**4** (1956)，548—564.
[7] 胡世华与陆鍾万：一般递归函数的范式．数学学报，**4** (1958)，507—520.

NORMAL FORMS OF RECURSIVE FUNCTIONS

THEORY OF RECURSIVE ALGORITHMS III

HU SHIH-HUA
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

An abstract in English of this paper has been published in *Science Record* **4** (1960), 99—101, where it is put together with the abstract of another paper: Kernel Functions.

第10卷 第1期 数学学报 Vol. 10, No. 1
1960年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA March, 1960

稳定性理論中第一临界情形的微分方程与微分差分方程的等价性問題*

王 联
(中国科学院数学研究所)

§1. 問題与方法. 在[1]中提出了等价性問題，并对于一般 n 的情形作了系統的研究. 本文是处理在第一临界情形下的微分方程与微分差分方程的等价性問題.

問題是研究微分方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)) + Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)),\\ \frac{dx_s}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t) + (p_s+q_s)x(t) + X_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)) +\\ &\quad + Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)) \quad (s=1,2,\cdots,n).\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

与微分差分方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)) +\\ &\quad + Y(x_1(t-\delta(t)),\cdots,x_n(t-\delta(t)),x(t-\delta(t))),\\ \frac{dx_s}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}x_\sigma(t) + \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}x_\sigma(t-\delta(t)) + p_s x(t) + q_s x(t-\delta(t)) +\\ &\quad + X_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)) + Y_s(x_1(t-\delta(t)),\cdots,\\ &\quad x_n(t-\delta(t)),x(t-\delta(t))) \quad (s=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

之間在稳定性中的等价性. 这里 $p_{s\sigma}$, $q_{s\sigma}$, p_s, q_s 均为已給常数，$\delta(t)$ 或为非負的实常数，或为非負的实連續函数. 为了解决上述的問題，首先我們考虑 $p_s=0, q_s=0\ (s=1,2,\cdots,n)$ 的情形，即研究微分方程組:

$$\frac{dx}{dt} = X(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)) + Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)), \tag{1)'}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t) + X_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)) +\\ &\quad + Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)), \quad (s=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{1)''}$$

与微分差分方程組

---

* 1959年12月11日收到.

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= X(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)) + \\
&\quad + Y(x_1(t-\delta(t)),\cdots,x_n(t-\delta(t)),x(t-\delta(t))), \\
\frac{dx_s}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma}x_\sigma(t) + \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}x_\sigma(t-\delta(t)) + X_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)) + \\
&\quad + Y_s(x_1(t-\delta(t)),\cdots,x_n(t-\delta(t)),x(t-\delta(t))) \quad (s=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}\right\} \quad (2)'
$$

的等价性.

满足条件 (1). $|p_{s\sigma}+q_{s\sigma}-\delta_{s\sigma}\rho|=0\ (s,\sigma=1,2,\cdots,n)$ 的所有根 ρ_i 有

$$\operatorname{Re}(\rho_i)<0 \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

(2) $X(x_1,\cdots,x_n,x)$, $Y(x_1,\cdots,x_n,x)$, $X_s(x_1,\cdots,x_n,x)$, $Y_s(x_1,\cdots,x_n,x)$

是变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x$ 确定在坐标原点邻域内的解析函数,且展式的首項次数不低于 2;

(3)
$$
\begin{aligned}
X^{(0)}(0,\cdots,0,x) &= gx^m + g_{m+1}x^{m+1} + \cdots & g\neq 0,\ m\geqslant 2,\\
Y^{(0)}(0,\cdots,0,x) &= lx^m + l_{m+1}x^{m+1} + \cdots & l\neq 0,\ m\geqslant 2,\\
X_s^{(0)}(0,\cdots,0,x) &= g_sx^{m_s} + g_s^{(m_s+1)}x^{m_s+1} + \cdots & g_s\neq 0,\\
Y_s^{(0)}(0,\cdots,0,x) &= l_sx^{m_s} + l_s^{(m_s+1)}x^{m_s+1} + \cdots & l_s\neq 0;
\end{aligned}
$$

(4) $m_s\geqslant m$.

本文所用的方法就是在[1]中所指出的第二种方法.

§ 2. 穩定性的等价性定理

定理 1. 設 m 是奇数, $g+l<0$,則存在一正数 $\Delta=\Delta(X,Y,p_{s\sigma},q_{s\sigma},X_s,Y_s)>0$,使当 δ 满足不等式 $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$, 則 (2)′ 零解为漸近稳定.

証. 当 $\delta=0$ 时, m 是奇数, $g+l<0$, 则 (1)′ 之零解为漸近稳定. 因此存在負定列雅普諾夫函数

$$
V(x_1,\cdots,x_n,x)=\frac{1}{2}(g+l)x^2+W(x_1,\cdots,x_n)+x^2Q_2(x_1,\cdots,x_n)+\cdots + x^mQ_m(x_1,\cdots,x_n),
$$

这里 $W(x_1,\cdots,x_n)$ 是負定的二次型且满足方程

$$
\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_s}[(p_{s1}+q_{s1})x_1+\cdots+(p_{sn}+q_{sn})x_n]=\sum_{s=1}^{n}x_s^2,
$$

$$
Q_i(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j \quad (i=2,\cdots,m),\ A_{ij}\text{ 都是实常量.}
$$

$$
\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt}=
$$

$$
=[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m]\frac{dx}{dt}+\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+ x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right]\frac{dx_s}{dt}=[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m]\times
$$

$$
\times[X(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))+Y(x_1(t-\delta),\cdots,x_n(t-\delta),x(t-\delta))]+
$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}x_\sigma(t)+q_{s\sigma}x_\sigma(t-\delta))+\right.$$

$$\left.+X_s(x_1,\cdots,x_n,x)+Y_s(x_1(t-\delta),\cdots,x_n(t-\delta),x(t-\delta))\right]=$$

$$=[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m][X(x_1,\cdots,x_n,x)+Y(x_1,\cdots,x_n,x)]+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t)+\right.$$

$$\left.+X_s(x_1,\cdots,x_n,x)+Y_s(x_1,\cdots,x_n,x)\right]-[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+$$

$$+mx^{m-1}Q_m][Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))-$$

$$-Y(x_1(t-\delta),\cdots,x_n(t-\delta),x(t-\delta))]-$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right)\left[\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}(x_\sigma(t)-x_\sigma(t-\delta))+\right.$$

$$\left.+(Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t)))-Y_s(x_1(t-\delta),\cdots,x_n(t-\delta),x(t-\delta))\right]=$$

$$=[(l+g)^2+F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^{m+1}+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,x_1,\cdots,x_n)x_\alpha x_\beta-$$

$$-[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m]\times$$

$$\times\left[\int_{t-\delta}^{t}\frac{d}{dt}Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\right]-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+\right.$$

$$\left.+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right)\left(\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\int_{t-\delta}^{t}\frac{dx_\sigma(t)}{dt}dt+\int_{t-\delta}^{t}\frac{d}{dt}Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\right).$$

下面卽估計 δ 之值. 使得它能保証 $\frac{dV}{dt}>0$ 卽可.

根据在第一临界情形下作列雅普諾夫函数的过程中知道函数 $F(x,x_1,\cdots,x_n)$, $F_{\alpha\beta}(x,x_1,\cdots,x_n)$ 是确定在一个充分小的坐标原点邻域

$$|x|<\beta,\ |x_i|<\beta_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2.1}$$

内的解析函数. 这里 $\beta>0$, $\beta_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 充分小,又由条件(2)知,在 (2.1) 的任何一个閉域

$$|x|\leqslant\gamma<\beta,\ |x_i|\leqslant\gamma_i<\beta_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2.2}$$

上, $Y(x_1,\cdots,x_n,x)$, $Y_s(x_1,\cdots,x_n,x)$ 及其对于各个自变量的偏导数都是有界的. 同理,有

$$\frac{dY}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt}+\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dY_s}{dt}=\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\partial Y_s}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{dt}+\frac{\partial Y_s}{\partial x}\frac{dx}{dt}.$$

由条件(3)知

$\frac{\partial Y}{\partial x_s}=(x_1,\cdots,x_n,x)_1$, 記号 $(x_1,\cdots,x_n,x)_1$ 表示其展式的首項次数不低于 1 次;

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=(x_1,\cdots,x_n)_1+mlx^{m-1}+(m+1)l_{m+1}x^m+\cdots;$$

$$\frac{\partial Y_s}{\partial x_\sigma}=(x_1,\cdots,x_n,x)_1$$

$$\frac{\partial Y_s}{\partial x}=(x_1,\cdots,x_n)_1+m_sl_sx^{m_s-1}+(m_s+1)l_s^{(m_s+1)}x^{m_s}+\cdots.$$

記　$a=\max_{1\leqslant s,\sigma\leqslant n}\{|p_{s\sigma}|,|q_{s\sigma}|\}$.

任給一 $H(x_1,\cdots,x_n,x)=(l+g)^2x^{m+1}+\sum_{s=1}^n x_s^2=\varepsilon>0$，$\varepsilon$ 无論怎样小，在此閉曲面上我們都有 $|x_s(t)|\leqslant\sqrt{\varepsilon}$，$|x_s(t-\delta)|\leqslant\sqrt{\varepsilon}$，$|x(t)|\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}$，$|x(t-\delta)|\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}$. 因此，在这个閉曲面上，我們有下列的估值：

$$\left|\frac{dx_s}{dt}\right|\leqslant 2na\sqrt{\varepsilon}+M_s\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\quad(\because X_s(x_1,\cdots,x_n,x)=(x_1,\cdots,x_n,x)_2),$$

其中 $M_s>0$ 常量.

$$\left|\frac{dx}{dt}\right|\leqslant M\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\cdot\sqrt{\varepsilon}$$

$$(\because X(x_1,\cdots,x_n,x)+Y(x_1,\cdots,x_n,x)=(x_1,\cdots,x_n,x)_2,$$

其中 $M>0$ 常量.

应用上述的估值，在閉曲面 $H(x_1,\cdots,x_n,x)=\varepsilon$ 上我們有

$$\left|\frac{dY}{dt}\right|\leqslant\sum_{s=1}^n\left|\frac{\partial Y}{\partial x_s}\right|\left|\frac{dx_s}{dt}\right|+\left|\frac{\partial Y}{\partial x}\right|\left|\frac{dx}{dt}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^n L_s\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\left(2na\sqrt{\varepsilon}+M_s\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right)+$$

$$+L\sqrt{\varepsilon}\cdot M\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\sqrt{\varepsilon}=$$

$$=\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\sqrt{\varepsilon}\left[\sum_{s=1}^n L_s2an+\sum_{s=1}^n L_sM_s\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}+LM\sqrt{\varepsilon}\right]\leqslant$$

$$\leqslant L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}},\quad L_0>0\ \text{常量}.$$

同理，

$$\left|\frac{dY_s}{dt}\right|\leqslant\bar{L}_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}},\quad\bar{L}_0>0\ \text{常量}.$$

因此，

$$\left|\int_{t-\delta}^t\left|\frac{d}{dt}Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))\right|dt\right|\leqslant L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\delta,$$

$$\left|\int_{t-\delta}^{t}\frac{d}{dt}Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\right|\leqslant \overline{L}_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\delta,$$

$$\left|\int_{t-\delta}^{t}\frac{dx_\sigma(t)}{dt}dt\right|\leqslant\left[2na\sqrt{\varepsilon}+M_s\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right]\delta.$$

又由

$$Q_i(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j,\quad 記\ A=\max_{2\leqslant i\leqslant m}\{|A_{i1}|,\cdots,|A_{in}|\},\quad (i=2,\cdots,m)$$

$$\therefore\quad \left|\frac{\partial Q_i}{\partial x_s}\right|\leqslant A,\quad |Q_i(x_1,\cdots,x_n)|\leqslant A\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

因此在閉曲面 $H(x_1,\cdots,x_n,x)=\varepsilon$ 上我們亦有

$$|[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m]|\leqslant\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\times$$

$$\times\left[|l+g|+nA\sqrt{\varepsilon}\left(2+3\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cdots+m\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{m-2}{m+1}}\right)\right]\leqslant M_0\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}},\quad M_0>0 \text{ 常量.}$$

再有 $W(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i\cdot j=1}^{n}\beta_{ij}x_ix_j$ 是負定的二次型. 記 $B=\max_{1\leqslant i\cdot j\leqslant n}\{|B_{ij}|\}$,

$$\therefore\quad \left|\frac{\partial W}{\partial x_s}\right|_{H=\varepsilon}\leqslant nB\sqrt{\varepsilon}.$$

总結上述的討論,在閉曲面 $H(x_1,\cdots,x_n,x)=\varepsilon$ 上我們有

① $$\left|\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right)\left(\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\int_{t-\delta}^{t}\frac{dx_\sigma(t)}{dt}dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{t-\delta}^{t}\frac{d}{dt}Y_s(x_1,\cdots,x_n,x)dt\right)\right|\leqslant\sum_{s=1}^{n}(nB\sqrt{\varepsilon}+Ax^2(1+x+\cdots+x^{m-2}))\times$$

$$\times\left[\sum_{\sigma=1}^{n}a\left(2na+M_s\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right)\sqrt{\varepsilon}+\overline{L}_0\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\sqrt{\varepsilon}\right]\delta\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{n}\left(nB\sqrt{\varepsilon}+A\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{2}{m+1}}\left(1+\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}+\cdots+\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{m-2}{m+1}}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{\sigma=1}^{n}a\left(2na+M_s\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}+\overline{L}_0\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right]\sqrt{\varepsilon}\cdot\delta\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\cdot\delta G_0,\quad G_0>0.$$

注意上式中两个括弧里的項相乘是 $2n^2a^2$ + 有限量 (这因 ε 可任意小), 所以我們总可取到 G_0 (与 ε 无关的量) 来控制上述乘积的結果, 前面的 $\overline{L}_0$, L_0, M_0 等常量都具有 G_0 的性質, 因此它們亦是与 ε 无关的.

② $$\left|[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m]\left(\int_{t-\delta}^{t}\frac{d}{dt}Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_0\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m+1}}\delta \leqslant M_0L_0\delta\varepsilon,$$

$$\therefore\quad \left|[(l+g)x+2xQ_2+\cdots+mx^{m-1}Q_m]\left(\int_{t-\delta}^{t}\frac{dY}{dt}dt\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right)\left(\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\int_{t-\sigma}^{t}\frac{dx_\sigma}{dt}dt+\int_{t-\delta}^{t}\frac{dY_s}{dt}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_0L_0\delta\varepsilon+\varepsilon\delta\cdot G_0=(M_0L_0+G_0)\delta\varepsilon=G\delta\varepsilon \quad (G=M_0L_0+G_0).$$

由于，$[(g+l)^2+F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^{m+1}+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,x_1,\cdots,x_n)x_\alpha x_\beta$ 在原点的充分小邻域內是正定的，所以我們只要把坐标原点的邻域取得这样小，使得

$$[(g+l)^2+F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^{m+1}+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,x_1,\cdots,x_n)x_\alpha x_\beta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[(g+l)^2x^{m+1}+\sum_{s=1}^{n}x_s^2\right],$$

故任意給一个閉曲面

$$H(x_1,\cdots,x_n,x)=(g+l)^2x^{m+1}+\sum_{s=1}^{n}x_s^2=\varepsilon \quad \varepsilon>0.$$

无論怎样小，我們都可以找到 Δ，我們只要作

$$G\delta\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon,\ \text{即}\ \delta\leqslant\frac{1}{2G}.$$

卽取 $\Delta=\dfrac{1}{2G}>0$ 与 ε 无关，使当 $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$ 时，则 $(2)'$ 的零解是稳定的．下面我們更进一步的来証明 $(2)'$ 的零解．当 $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$ 时是漸近稳定的．

由于

$$V(t)=V(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))=\frac{1}{2}(g+l)x^2+W(x_1,\cdots,x_n)+$$

$$+x^2Q_2(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+t^mQ_m(x_1,\cdots,x_n)$$

是負定的，故 $V(t)\leqslant 0$．根据前面的討論，得知：当 $-\delta\leqslant t\leqslant 0$ 时，給出 $x_s(t)$ 是連續的，则在 $t\geqslant 0$ 时，$\dfrac{dV}{dt}$ 存在是連續的，卽函数 $V(t)$ 是平滑的．如果我們現在令由初始时 $-2\delta\leqslant t\leqslant 0$ 所确定的方程組 $(2)'$ 的解 $x_s(t)$ 是連續的話，则由 $\dfrac{dV}{dt}$ 的性質知：

$$\max_{-2\delta\leqslant t\leqslant 0}V(t)\leqslant V(t)\,(t\geqslant 0)\leqslant 0. \tag{2.3}$$

下面我們来証明漸近稳定性．

(i) 函数 $V(t)$ 不能从某个 $t>t_0$ 之后单調的減少．

証． 用反証法：假如从某个 $t>t_0$ 之后，$V(t)$ 是单調的減少，则由性質(2.3)知：单

調下降有界的函数必有极限. $\therefore \lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = -\varepsilon_1 < 0$. 这就說明了:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dV}{dt} = \lim_{t\to\infty}\Big\{[(l+g)^2 + F(x,x_1,\cdots,x_n)]\,x^{m+1} + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}(x_1,\cdots,x_n,x)x_\alpha x_\beta - [(l+g)x + 2xQ_2 + \cdots + mx^{m-1}Q_m] \times$$

$$\times \Big(\int_{t-\delta}^{t}\frac{d}{dt}Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\Big) - \sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{\partial W}{\partial x_s} + x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s} + \cdots +$$

$$+ x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\Big)\Big(\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}\int_{t-\delta}^{t}\frac{dx_\sigma(t)}{dt}dt + \int_{t-\delta}^{t}\frac{d}{dt}Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\Big)\Big\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_1 - G\delta\varepsilon_1 = \Big(\frac{1}{2} - G\delta\Big)\varepsilon_1 > 0.$$

故当 t 充分大时, 则有 $\frac{dV}{dt} > 0$. 也即是說当 t 充分大时, 函数 $V(t)$ 不是单調減少的, 这与假設矛盾. 故函数 $V(t)$ 不能从某个 $t > t_0$ 之后单調的減少.

(ii) 函数 $V(t)$ 如果从某个 $t > t_0$ 之后是单調的增加, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = 0$.

証. 用反証法: 如果从某个 $t > t_0$ 之后, $V(t)$ 是单調增加, 但 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) \neq 0$. 即 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = -\varepsilon^* < 0$, 则我們就应有 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{dV}{dt} = 0$.

但另一方面, 按照前面的討論我們又有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dV}{dt} \geqslant \Big(\frac{1}{2} - \delta G\Big)\varepsilon^* > 0.$$

由此即导出矛盾. 故当 $V(t)$ 是单調增加时, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = 0$, 这就說明(2)′之零解是漸近稳定的.

(iii) 最后要研究的是: 即当 $t \to +\infty$, 函数 $V(t)$ 既不是单調的增加, 亦不是单調的減少, 即函数 $|V(t)|$ 随着时間的增大出現无限个相对的极大値 (因 $V(t)$ 是平滑的). 下面要証的即是当 $t \to +\infty$ 时, 这些相对的极大値趋于零. 証明了这一点也就証明了(2)′ 的零解是漸近稳定的.

証. 設在 $-2\delta \leqslant t \leqslant 0$ 函数 $V(t)$ 的最大値为 $M < 0$, 则由性質(2.3)知

$$M = \max_{-2\delta\leqslant t\leqslant 0} V(t) \leqslant V(t) \quad (t \geqslant 0) \leqslant 0.$$

为方便起見, 我們不妨取 $\Delta = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2G}\Big)$. 設 $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$, 在 $t > 0$ 之后函数 $V(t)$ 之第一个极大値設在 $t_1 > 0$ 处, 则

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{t=t_1} = 0 = \Big\{[(l+g)^2 + F(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))]x^{m+1} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} x_s^2(t) + \sum_{\alpha\cdot\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))x_\alpha(t)x_\beta(t) - [(l+g)x(t) +$$

$$+ 2xQ_2 + \cdots + mx^{m-1}Q_m]\Big(\int_{t-\delta}^{t}\frac{d}{dt}Y(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\Big) -$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x^2\frac{\partial Q_2}{\partial x_s}+\cdots+x^m\frac{\partial Q_m}{\partial x_s}\right)\left(\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\int_{t-\delta}^{t}\frac{dx_\sigma}{dt}dt+\right.$$

$$\left.+\int_{t-\delta}^{t}\frac{d}{dt}Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))dt\right)\Bigg\}_{t=t_1}\geqslant\frac{1}{2}[(l+g)^2x^{m+1}+\sum x_s^2]_{t=t_1}-$$

$$-G\delta|M|\geqslant\frac{1}{2}\left[(l+g)^2x^{m+1}(t)+\sum_{s=1}^{n}x_s^2(t)\right]_{t=t_1}-G\Delta|M|,$$

$$\therefore\quad\frac{1}{2}H(x_1(t_1),\cdots,x_n(t_1),x(t_1))\leqslant G\Delta|M|.$$

即

$$H(x_1(t_1),\cdots,x_n(t_1),x(t_1))\leqslant\frac{|M|}{2}G\Delta=\frac{1}{2}\left(\frac{|M|}{4}\right)=\frac{|M|}{2\cdot 4}.$$

这样在 $t\geqslant t_1+2\delta$ 后之第一个相对的极大値 t_2 处我們有

$$H(x_1(t_2),\cdots,x_n(t_2),x(t_2))\leqslant\frac{1}{2^2}\left(\frac{|M|}{4}\right).$$

因为当 $t\to+\infty$ 时，出現无限多个相对的极大値，因此象上面这样継續的作下去，即得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|M|}{2^{n+2}}=0.$$

即 $\lim\limits_{t\to\infty}H(t)=0$. 因为 $H(t)=\frac{1}{2}\left[(l+g)^2x^{m+1}(t)+\sum\limits_{s=1}^{n}x_s^2(t)\right]$ 是正定的，故

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0\ \lim_{t\to\infty}x_s(t)=0,$$

定理証毕.

§ 3. 不穩定性的等价定理

由 § 2 的討論知：当 $\delta=0$ 时，如果 m 是奇数，而 $g+l>0$，則 (2)′ 的零解是不稳定的．这是因为

$$V=\frac{1}{2}(g+l)x^2+W(x_1,\cdots,x_n)+x^2Q_2(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+x^mQ_m(x_1,\cdots,x_n)$$

是变号的，而 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)'}$ 是正定的．象前面一样，我們得到：任給 $H=\varepsilon>0$. ε 无論怎样小，一定存在 $\Delta=\frac{1}{2G}>0$ 与 ε 无关，使当 $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$ 时，則 (2)′ 的零解亦是不稳定的．总結得下列定理

定理 2. 設 m 是奇数，$g+l>0$，則存在一正数 $\Delta=\Delta(X,Y,p_{s\sigma},q_{s\sigma},X_s,Y_s)>0$，使当 δ 滿足不等式 $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$ 时，則 (2)′ 零解亦是不稳定.

定理 3. 設 m 是偶数，$g+l\neq 0$，則存在一正数 $\Delta=\Delta(X,Y,p_{s\sigma},q_{s\sigma},X,Y)>0$，使当 δ 滿足不等式 $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$，則 (2)′ 的零解不稳定.

証. 当 $\delta=0$ 时，如果 m 是偶数，且 $g+l\neq 0$，則 (1)′ 的零解是不稳定的，因此存在李雅普諾夫函数：

$$V(x_1,\cdots,x_n,x)=\alpha^2(g+l)x+W(x_1,\cdots,x_n)+xQ_1(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+$$
$$+x^{m-1}Q_{m-1}(x_1,\cdots,x_n),$$

这里，$Q_i(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \quad (i=1,2,\cdots,m-1)$，$W(x_1,\cdots,x_n)$ 与定理 1 中所述的一样. 而 α 是这样小的实常数，它使得函数

$$\mathscr{F}(x_1,\cdots,x_n,x)=[\alpha^2(l+g)^2+F(x_1,\cdots,x_n,x)]x^m+\alpha^2 g(X^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)+$$
$$+Y^{(2)}(x_1,\cdots,x_n))+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,x_1,\cdots,x_n)x_\alpha x_\beta$$

是正定的，其中 $X^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)$，$Y^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)$ 分別是函数 $X(0,x_1,\cdots,x_n)$，$Y(0,x_1,\cdots,x_n)$ 中所有包含自变数 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次項的全体.

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt}=[\alpha^2(g+l)+Q_1(x_1,\cdots,x_n)+$$
$$+2xQ_2(x_1,\cdots,x_n)+\cdots+(m-1)x^{m-2}Q_{m-1}(x_1,\cdots,x_n)]\frac{dx}{dt}+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x\frac{\partial Q_1}{\partial x_s}+\cdots+x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right)\frac{dx_s}{dt}=$$
$$=[\alpha^2(l+g)^2+F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^m+\alpha^2 g[X^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)+Y^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)]+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,x_1,\cdots,x_n)x_\alpha x_\beta-\Big\{[\alpha^2(g+l)+Q_1+2xQ_2+\cdots+$$
$$+(m-1)x^{m-2}Q_{m-2}]\int_{t-\delta}^{t}\frac{dY}{dt}dt+\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}+x\frac{\partial Q_1}{\partial x_s}+\cdots+x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\int_{t-\delta}^{t}\frac{dx_\sigma}{dt}dt+\int_{t-\delta}^{t}\frac{dY_s}{dt}dt\right]\Big\}.$$

象前面一样的来估計 δ，使得它能保証 $\frac{dV}{dt}$ 的正定性.

任給閉曲面

$$H(x,x_1,\cdots,x_n)=\alpha^2(g+l)^2x^m+\alpha^2 g[X^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)+Y^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)]+\sum_{s=1}^{n}x_s^2=\varepsilon,$$

$\varepsilon>0$ 无論怎样小，则在此閉曲面上我們有下列的估値：

$$|\alpha^2(g+l)+Q_1+2xQ_2+3x^2Q_3+\cdots+(m-1)x^{m-2}Q_{m-1}|\leqslant|\alpha^2(g+l)|+$$
$$+nA\sqrt{\varepsilon}(1+2|x|+\cdots+(m-1)|x|^{m-2})\leqslant$$
$$\leqslant\alpha^2|g+l|+nA(m-1)\sqrt{\varepsilon}\left(1+\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}}+\cdots+\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{m-2}{m}}\right)=$$
$$=\alpha^2|g+l|+nA(m-1)\sqrt{\varepsilon}\,\frac{1-\left(\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}}\right)^{m-1}}{1-\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}}}\leqslant L_1,$$

L_1 常量与 ε 无关.

$$\left|\frac{dY}{dt}\right|\leqslant L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$\left|\frac{dY_s}{dt}\right| \leqslant \bar{L}_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$\left|\frac{dx_s}{dt}\right| \leqslant 2na\sqrt{\varepsilon} + M_s\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \left|\frac{dx}{dt}\right| \leqslant M\left(\frac{\varepsilon}{(l+g)^2\alpha^2}\right)^{\frac{1}{m}}\sqrt{\varepsilon}.$$

$$\left|\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s} + x\frac{\partial Q_1}{\partial x_s} + \cdots + x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial W}{\partial x_s}\right| + |x|\left|\frac{\partial Q_1}{\partial x_s}\right| + \cdots + \left|x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n}\left[nB\sqrt{\varepsilon} + A\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1-\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{1-\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)}\right)^{\frac{1}{m}}}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant E_1\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}},$$

其中 $E_1 > 0$ 与 ε 无关常量，再注意 $m \geqslant 2$.

总結上述討論，即得：

$$\left\{[\alpha^2(g+l) + Q_1 + 2xQ_2 + \cdots + (m-1)x^{m-2}Q_{m-2}]\int_{t-\delta}^{t}\frac{dY}{dt}dt + \right.$$

$$+ \left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s} + x\frac{\partial Q_1}{\partial x_s} + \cdots + x^{m-1}\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial x_s}\right)\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}\int_{t-\delta}^{t}\frac{dx_\sigma}{dt}dt + \right.$$

$$\left.\left. + \int_{t-\delta}^{t}\frac{dY_s}{dt}dt\right]\right\}_{H=\varepsilon} \leqslant L_1 L_0\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\delta + E_1\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\times$$

$$\times\left[2n^2a^2\sqrt{\varepsilon} + naM_s\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\delta + M\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(g+l)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\delta\right] \leqslant$$

$$\leqslant [L_1L_0 + 2n^2a^2E_1 + (\text{有限常量})]\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha^2(l+g)^2}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\delta \leqslant G\delta\cdot\varepsilon,$$

这里 $G > 0$ 与 ε 无关.

同样的我們只要把坐标原点的邻域取得如此的小使得

$$[\alpha^2(g+l)^2 + F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^m + \alpha^2 g[X^{(2)}(x_1,\cdots,x_n) + Y^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}x_s^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,\cdots,x_n,x)x_\alpha x_\beta \geqslant \frac{1}{2}[\alpha^2(g+l)^2 + F(x,x_1,\cdots,x_n)]x^m +$$

$$+ \alpha^2 g(X^{(2)}(x_1,\cdots,x_n) + Y^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)) + \sum_{s=1}^{n}x_s^2.$$

故任給 $H(x,x_1,\cdots,x_n) = \varepsilon > 0$，都可找到 $\Delta = \frac{1}{2G}$（$\because$ 只要作 $G\delta\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$ 即可），使当 $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$ 时，則 (2)′ 的零解不稳定．定理証毕．

§4. 一般情形，即

$$p_s \neq 0,\ q_s \neq 0 \quad (s = 1,2,\cdots,n)$$

我們註

$$f_s(x,x_1,\cdots,x_n)\equiv\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t)+(p_s+q_s)x(t)+$$
$$+X_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))+Y_s(x_1(t),\cdots,x_n(t),x(t))=0.\quad(s=1,2,\cdots,n)\tag{4.1}$$

由 $f_s(0,0,\cdots,0)=0\quad(s=1,2,\cdots,n)$, 且

$$\left\{\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right\}\Bigg|_{\substack{x=x_j=0\\ j=1,2,\cdots,n}}=|p_{ik}+q_{ik}|\neq 0.$$

根据隐函数存在定理,由方程組(4.1)我們可解得

$$x_s=u_s(x)=A_s^{(1)}x+A_s^{(2)}x^2+\cdots\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{4.2}$$

这里 $A_s^{(j)}$ 是常量. 在 $|x|$ 充分小时, $u_s(x)$ 是 x 的全純函数. 对方程組(1)我們作变換

$$x_s=\xi_s+u_s(x)\quad(s=1,2,\cdots,n).\tag{4.3}$$

即得:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)+Y(x,\xi_1,\cdots,\xi_n),\\ \dfrac{d\xi_s}{dt}=\displaystyle\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})\xi_\sigma+X_s(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)+Y_s(x,\xi_1,\cdots,\xi_n).\end{cases}\tag{4.4}$$
$$(s=1,2,\cdots,n)$$

对(4.4)而言:

(i) 当 $g+l<0$, m 奇数,存在負定的列雅普諾夫函数:

$$V(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)=\frac{1}{2}(g+l)x^2+W(\xi_1,\cdots,\xi_n)+$$
$$+x^2Q_2(\xi_1,\cdots,\xi_n)+\cdots+x^mQ_m(\xi_1,\cdots,\xi_n),$$

所以对方程組(1)而言,在同样的假定下,存在列雅普諾夫函数:

$$V(x,x_1-u_1(x),\cdots,x_n-u_n(x))=\frac{1}{2}(g+l)x^2+$$
$$+W(x_1-u_1(x),\cdots,x_n-u_n(x))+x^2Q_2(x_1-u_1(x),\cdots,x_n-u_n(x))+$$
$$+\cdots+x^mQ_m(x_1-u_1(x),\cdots,x_n-u_n(x)).\tag{4.5}$$

因为 $W(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\sum_{ij=1}^{n}c_{ij}\xi_i\xi_j$ 是負定的二次型:

$$Q_i(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\xi_j=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j-\sum_{j=1}^{n}A_{ij}u_j(x)\quad(i=2,\cdots,n)$$

$$\therefore\quad x^kQ_k(x_1-u_1(x),\cdots,x_n-u_n(x))=\left[\sum_{j=1}^{n}A_{kj}(x_j-u_j(x))\right]x^k,$$

$$W(x_1-u_1(x),\cdots,x_n-u_n(x))=\sum_{ij=1}^{n}c_{ij}x_ix_j+\sum_{ij=1}^{n}c_{ij}u_iu_j-\sum_{ij=1}^{n}c_{ij}(x_iu_j+x_ju_i).$$

我們記

$$G(x)=-x^2Q_2(u_1(x),\cdots,u_n(x))-x^3Q_3(u_1(x),\cdots,u_n(x))-\cdots-$$
$$-x^mQ_m(u_1(x),\cdots,u_n(x)),$$

显見 $G(x)$ 的首項次数不低于 3. 因此(4.5)可改写为

$$V^*(x,x_1,\cdots,x_n) = V(x,x_1-u_1(x),\cdots,x_n-u_n(x)) =$$

$$= \frac{1}{2}(g+l)x^2 + W(x_1,\cdots,x_n) + W(u_1(x),\cdots,u_n(x)) -$$

$$- \sum c_{ij}(x_i u_j(x) + x_j u_i(x)) + x^2 Q_2(x_1,\cdots,x_n) + x^3 Q_3(x_1,\cdots,x_n) +$$

$$+ \cdots + x^m Q_m(x_1,\cdots,x_n) + G(x). \tag{4.6}$$

因为我們所作的变换 (4.3) 是拓扑变换，它把定号函数仍旧变到定号函数，所以 $V^*(x,x_1,\cdots,x_n)$ 亦是确定在坐标原点的充分小的邻域内的負定的函数. 为了簡便起見，我們記

$$W(u_1(x),\cdots,u_n(x)) + G(x) = G_0(x).$$

显見 $G_0(x)$ 的首項次数不低于 2. 再令

$$U(x,x_1,\cdots,x_n) = -\sum_{ij=1}^{n} c_{ij}(x_i u_j(x) + x_j u_i(x)),$$

$U(x,x_1,\cdots,x_n)$ 的展式的首項次数(对 $x,x_1,\cdots,x_n$ 而言)不低于 2，但 U 有这样的一个特性，即 $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = 0$. 因此(4.6)可簡写成下列形式：

$$V^*(x,x_1,\cdots,x_n) = \frac{1}{2}(g+l)x^2 + W(x_1,\cdots,x_n) + G_0(x) +$$

$$+ U(x,x_1,\cdots,x_n) + \sum_{k=2}^{m} x^k Q_k(x_1,\cdots,x_n).$$

对方程組(2)而言，我們作 V^* 关于 t 的全导数

$$\frac{dV^*}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V^*}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt} + \frac{\partial V^*}{\partial x}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s} + \frac{\partial U}{\partial x_s} + \sum_{k=2}^{m} x^k A_{ks}\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}x_\sigma(t) + q_{s\sigma}x_\sigma(t-\delta)) +\right.$$

$$+ p_s x(t) + q_s x(t-\delta) + X_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)) +$$

$$\left.+ Y_s(x(t-\delta),x_1(t-\delta),\cdots,x_n(t-\delta))\right] +$$

$$+ \left[(g+l)x + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dG_0}{dx} + \sum_{k=2}^{m} kx^{k-1}Q_k(x_1,\cdots,x_n)\right]\cdot$$

$$\cdot [X(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)) + Y(x(t-\delta),x_1(t-\delta),\cdots,x_n(t-\delta))] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s} + \frac{\partial U}{\partial x_s} + \sum_{k=2}^{m} A_{ks}x^k\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma} + q_{s\sigma})x_\sigma(t) + (p_s + q_s)x(t) +\right.$$

$$\left.+ X_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)) + Y_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))\right] +$$

$$+ \left[(g+l)x + \sum_{k=2}^{m} kx^{k-1}Q_k(x_1,\cdots,x_n) + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dG_0}{dx}\right]\cdot$$

$$\cdot [X(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)) + Y(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))] -$$

$$-\left\{\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s}+\frac{\partial U}{\partial x_s}+\sum_{k=2}^{m}A_{ks}x^k\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}(x_\sigma(t)-x_\sigma(t-\delta))+\right.\right.$$

$$+q_s(x(t)-x(t-\delta))+Y_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))-$$

$$\left.-Y_s(x(t-\delta),x_1(t-\delta),\cdots,x_n(t-\delta))\right]+$$

$$+\left[(l+g)x+\sum_{k=2}^{m}kx^{k-1}Q_k(x_1,\cdots,x_n)+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{dG_0}{dx}\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\left[Y(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))-Y(x(t-\delta),x_1(t-\delta),\cdots,x_n(t-\delta))\right]\right\}=$$

$$=I(x,x_1,\cdots,x_n)-II(x,x_1,\cdots,x_n).$$

我們知道，当满足条件：m 为奇数与 $g+l<0$，则 (4.4) 存在負定的列雅普諾夫函数：

$$V(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)=\frac{1}{2}(g+l)x^2+W(\xi_1,\cdots,\xi_n)+$$

$$+x^2Q_2(\xi_1,\cdots,\xi_n)+\cdots+x^mQ_m(\xi_1,\cdots,\xi_n),$$

它对 t 的导数由(4.4)构成，即

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4.4)}=[(g+l)^2+F(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)]x^{m+1}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)\xi_\alpha\xi_\beta$$

为正定的．然后把 ξ_s 用 $x_s-u_s(x)$ 来代换．即得 $\frac{dV^*}{dt}$ 的第一部分，即

$$I(x,x_1,\cdots,x_n)\equiv\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s}+\sum_{k=2}^{m}A_{ks}x^k+\frac{\partial U}{\partial x_s}\right]\left[\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t)+\right.$$

$$\left.+(p_s+q_s)x(t)+X_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))+Y_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))\right]+$$

$$+\left[(g+l)x+\sum_{k=2}^{m}kx^{k-1}Q_k(x_1,\cdots,x_n)+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{dG_0(x)}{dx}\right]\cdot$$

$$\cdot[X(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))+Y(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))].$$

因为变换(4.3)是拓扑变换，因此在 $x=x_1=\cdots=x_n=0$ 的充分小邻域内 $I(x,x_1,\cdots,x_n)$ 亦是正定的．这样一来，我們只要选取充分的 δ，使 $\frac{dV^*}{dt}$ 的第二部分不超过 $|I(x,x_1,\cdots,x_n)|$．亦即是説选择充分小的 δ 使下列不等式成立

$$|II(x,x_1,\cdots,x_n)|=\left|\left\{\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial x_s}+\frac{\partial U}{\partial x_s}+\sum_{k=2}^{m}A_{ks}x^k\right]\cdot\left[\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}\int_{t-\delta}^{t}\frac{dx_\sigma(t)}{dt}dt+\right.\right.\right.$$

$$\left.+q_s\int_{t-\delta}^{t}\frac{dx(t)}{dt}dt+\int_{t-\delta}^{t}\frac{dY_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))}{dt}dt\right]+$$

$$+\left[(g+l)x+\sum_{k=2}^{m}kx^{k-1}Q_k(x_1,\cdots,x_n)+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{dG_0}{dx}\right]\cdot$$

$$\left.\left.\cdot\left[\int_{t-\delta}^{t}\frac{dY(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))}{dt}dt\right]\right\}\right|<|I(x,x_1,\cdots,x_n)|.$$

这样一来我們就可建立类似于定理 1 的方程組(1)与(2)的等价性定理．而对剩下的两种

情形

(ii)　　$g + l > 0$,　m 是奇数

(iii)　　$g + l \neq 0$,　m 是偶数

我們亦可建立类似于定理 2 与定理 3 的方程組(1)与(2)之間的不稳定性的等价性定理，这里不再重述了.

§5. 奇异情形

当 $(1)'$ 滿足条件

$$X(0,\cdots,0,x) \equiv X_s(0,\cdots,0,x) \equiv Y_s(0,\cdots,0,x) \equiv Y(0,\cdots,0,x) = 0$$
$$(s = 1,2,\cdots,n),$$

我們就称 $(1)'$ 为奇异情形. 根据 A. M. Ляпунов 定理知 $(1)'$ 的零解在奇异情形永远是稳定,但不是漸近稳定. 显見

$$x = c,\quad x_1 = \cdots = x_n = 0 \tag{5.1}$$

是 $(1)'$ 的一解, c 是一个常量. 如果註 $c = 0$ 卽得 $(1)'$ 的零解; 这說明 $(1)'$ 的零解是属于一个参数的駐定运动族(5.1)中,对应于 $c = 0$ 的一个駐定运动. 对(5.1)中之任一个駐定运动(例如 $x = c_0$, $x_1 = \cdots = x_n = 0$), 如果我們把它当作未被扰动运动时,它也具有 $(1)'$ 之零解的性质. 現在我們要問: 卽对 $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$ (Δ 为正常数) 时, $(2)'$ 之零解是否亦具有上述 $(1)'$ 之零解的性质呢? 回答是肯定的,也就是說在奇异情形下的微分方程与微分差分方程之間存在稳定性方面的等价性关系. 下面我們就来論証这一点.

定理. 已知 $(1)'$ 的平凡解是稳定的,則存在一正数

$$\Delta = \Delta(X, Y, p_{s\sigma}, q_{s\sigma}, X_s, Y_s) > 0,$$

使当 δ 滿足不等式 $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$, 則 $(2)'$ 的平凡解亦是稳定的.

証. 将 $(2)'$ 改写成下列形式:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= X(x,x_1,\cdots,x_n) + Y(x,x_1,\cdots,x_n) + \\
&\quad + [Y(x(t-\delta(t)); x_1(t-\delta(t)),\cdots,x_n(t-\delta(t))) - \\
&\quad - Y(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))],\\
\frac{dx_s(t)}{dt} &= \sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma(t) + X_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)) + \\
&\quad + Y_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t)) + \\
&\quad + \Big[\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(x_\sigma(t-\delta(t)) - x_\sigma(t)) + \\
&\quad + Y_s(x(t-\delta(t)),x_1(t-\delta(t)),\cdots,x_n(t-\delta(t))) - \\
&\quad - Y_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))\Big] \quad (s = 1,2,\cdots,n).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由条件 1°, 知 $|p_{s\sigma} + q_{s\sigma} - \delta_{s\sigma}\chi| = 0$ $(s,\sigma = 1,2,\cdots,n)$的所有根 $\chi_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 都具有負实部,卽 $\mathrm{Re}(\chi_i) < 0$ $(i = 1,\cdots,n)$. 因此任給負定的二次型

$$W(x_1,\cdots,x_n) = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2$$

都存在正定的二次型 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 使

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\Big[\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma\Big]=-\sum_{s=1}^{n}x_s^2. \tag{5.1$_1$}$$

$$\therefore\quad \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\Big[\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma+X_s(x,x_1,\cdots,x_n)+Y_s(x,x_1,\cdots,x_n)\Big]=$$

$$=-\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(X_s(x,x_1,\cdots,x_n)+Y_s(x,x_1,\cdots,x_n)). \tag{5.1$_2$}$$

根据条件 $X_s(x,0\cdots0)\equiv Y_s(x,0\cdots0)\equiv 0$ 知

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(X_s(x,x_1,\cdots,x_n)+Y_s(x,x_1,\cdots,x_n))=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}f_{\alpha\beta}(x,x_1,\cdots,x_n)x_\alpha x_\beta,$$

其中 $f_{\alpha\beta}(x,x_1,\cdots,x_n)$ 是 $x_1x_s(s=1,\cdots,n)$ 的解析函数,其展式的首項次数不低于 1,即 $f_{\alpha\beta}(0,\cdots0)=0\quad(\alpha,\beta=1,2,\cdots,n)$. 因此,在原点的充分小邻域内,(5.1)$_2$ 是负定的.

我們借助于代换

$$\xi_s(t)=e^{\alpha t}x_s(t)\quad(s=1,2,\cdots,n),$$

(这里 $\alpha>0$ 待定)来变换方程(3)的后 n 个方程,即得:

$$\frac{d\xi_s}{dt}=\alpha e^{\alpha t}x_s+e^{\alpha t}\frac{dx_s}{dt}=$$

$$=\alpha\xi_s+e^{\alpha t}\Big\{\Big(\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma+X_s(x,x_1,\cdots,x_n)+Y_s(x,x_1,\cdots,x_n)+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}(x_\sigma(t-\delta(t))-x_\sigma(t))+$$

$$+Y_s(x(t-\delta(t)),x_1(t-\delta(t)),\cdots,x_n(t-\delta(t)))-$$

$$-Y_s(x(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))\Big\}.$$

注意 $e^{-\alpha t}\xi_s(t)=x_s(t)$,

$$\therefore\quad x_s(t-\delta)=\xi_s(t-\delta)e^{-\alpha(t-\delta)}=e^{\alpha\delta}e^{-\alpha t}\xi_s(t-\delta).$$

因此,将上述方程整理一下即得:

$$\frac{d\xi_s(t)}{dt}=\sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma}+q_{s\sigma}+\delta_{s\sigma}\alpha)\xi_\sigma+$$

$$+e^{\alpha t}(X_s(e^{-\alpha t}\xi_1,\cdots,e^{-\alpha t}\xi_n,x)+Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1,\cdots,e^{-\alpha t}\xi_n,x))+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}(e^{\alpha\delta}\xi_\sigma(t-\delta(t))-\xi_\sigma(t))+$$

$$+e^{\alpha t}[Y_s(e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_1(t-\delta(t)),\cdots,e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_n(t-\delta(t)),x(t-\delta(t)))-$$

$$-Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1(t),\cdots,e^{-\alpha t}\xi_n(t),x(t))]\quad(s=1,2,\cdots,n). \tag{5.2}$$

根据(5.2),我們作 $V(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的全导数:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \Big\{ \sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} + q_{s\sigma} + \delta_{s\sigma}\alpha)\xi_s +$$
$$+ e^{\alpha t}(X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) + Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)) +$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(e^{\alpha\delta}\xi_s(t-\delta) - \xi_s(t)) +$$
$$+ e^{\alpha t}[Y_s(e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_1(t-\delta), \cdots, e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_n(t-\delta), x(t-\delta)) -$$
$$- Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1(t), \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n(t), x(t))]\Big\} =$$
$$= -\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 + 2\alpha V(\xi_1, \cdots, \xi_n) +$$
$$+ e^{\alpha t}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}[X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) + Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)] +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}\Big[\sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma}(e^{\alpha\delta}\xi_s(t-\delta) - \xi_s(t))\Big] +$$
$$+ e^{\alpha t}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}[Y_s(e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_1(t-\delta), \cdots, e^{-\alpha t}e^{\alpha\delta}\xi_n(t-\delta)x(t-\delta)) -$$
$$- Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1(t), \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n(t), x(t))] =$$
$$= H(\xi_1(t), \cdots, \xi_n(t), x(t); \xi_1(t-\delta(t)), \cdots, \xi_n(t-\delta(t)), x(t-\delta(t))).$$

我們可以选择 α 如此的小，使得

$$-\sum_{s=1}^{n} \xi_s^2 + 2\alpha V(\xi_1, \cdots, \xi_n)$$

为負定的二次型．另一方面，因为 $X_s(x, 0\cdots 0) \equiv 0$，

$$Y_s(x, 0, \cdots, 0) \equiv 0 \quad (s = 1, \cdots, n).$$

因此在区域

$$t \geqslant 0, \ |\xi_s| \leqslant \beta, \ |x| \leqslant \beta \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

内当 β 充分小时，我們有下列的估值：

$$\Big| e^{\alpha t}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}[X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) + Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)]\Big| \leqslant$$
$$\leqslant B\{|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|\}^2.$$

再由 $X_s Y_s$ 展式的首項次数不低于 2，所以我們有

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \xi_s}[X_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x) + Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)] =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{\alpha\beta}(e^{-\alpha t}\xi_1, \cdots, e^{-\alpha t}\xi_n, x)\xi_\alpha\xi_\beta,$$

且

$$f_{\alpha\beta}(0, \cdots, 0) = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n),$$

故只要将 β 选取得适当小，即可使得正数 B 任意的小（注意 B 的大小依賴于 β 的选取）．

因此由馬尔金[2]的引理知;我們可以选取 β 如此的小,使得函数

$$-\sum_{s=1}^{n}\xi_s^2+2\alpha V(\xi_1,\cdots,\xi_n)+e^{\alpha t}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \xi_s}[X_s(e^{-\alpha t}\xi_1,\cdots,e^{-\alpha t}\xi_n,x)+ \\ +Y_s(e^{-\alpha t}\xi_1,\cdots,e^{-\alpha t}\xi_n,x)]$$

是負定的. 我們現在就假定正数 β 就是按照上述的要求选取的. 由于函数 $H(\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t),x(t);\xi_1(t-\delta(t)),\cdots,\xi_n(t-\delta(t)),\ x(t-\delta(t)))$ 当 $\delta=0$ 时是負定的, 根据連續性知存在正数 $\Delta>0$, 使当 $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$ 时, 函数 $H(\xi_1(t),\ \cdots,\ \xi_n(t),\ x(t);\ \xi_1(t-\delta(t)),\cdots,\xi_n(t-\delta(t)),x(t-\delta(t)))$ 仍是負定的. 至于 Δ 的估値仍如前面所説的同样方法去估値,在这个估値中应注意的就是

$$e^{\alpha\delta}\xi_s(t-\delta)-\xi_s(t)=e^{\alpha\delta}\xi_s(t-\delta)-e^{\alpha\delta}\xi_s(t)+(e^{\alpha\delta}-1)\xi_s(t)= \\ =\delta\left[\alpha\left(1+\frac{\alpha\delta}{2!}+\frac{\alpha^2\delta^2}{3!}+\cdots\right)\xi_s(t)-e^{\alpha\delta}\xi_s'(t-(1-\theta)\delta)\right].$$

其它估値类似,即可算得:

$$\Delta=\frac{1}{2nc_0[nM_2(\alpha+(3n+2)c_1+2M_1(1+e^{\alpha})+2M_2^2+e^{\alpha}\alpha)]},$$

其中 c_0, c_1, M_1, M_2 都是一些常数, 即由 $V(\xi_1\cdots\xi_n)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}c_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$,

$$c_0=\max_{\alpha\beta=1\cdots n}|c_{\alpha\beta}|,\quad c_1=\max_{s,\sigma=1\cdots n}[|p_{s\sigma}|,|q_{s\sigma}|],$$

$$M_1=\max_{\substack{|\xi_s|<\beta\\|x|<\beta}}(|X_s|,|Y_s|,|X|,|Y|),\ s=1,\cdots,n\quad M_2=\max_{\substack{|x|<\beta\\|\xi_s|<\beta}}\left(\left|\frac{\partial Y_s}{\partial x_\sigma}\right|\left|\frac{\partial Y_s}{\partial x}\right|\right). \\ (s=1,\cdots,n)$$

下面我們就来証明方程組(5.2)的平凡解当 $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$ 时是稳定的.

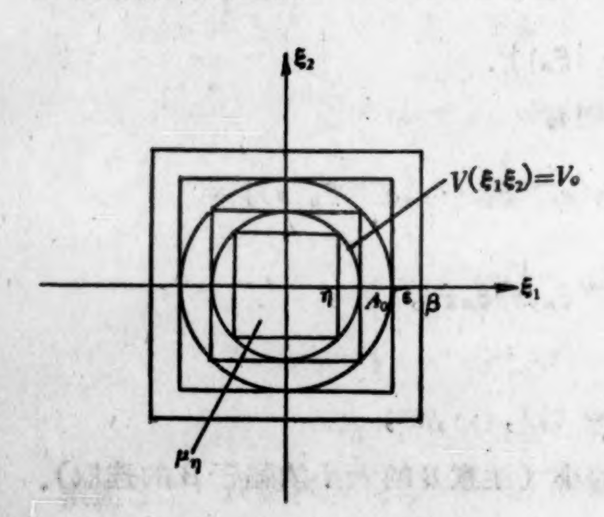
考虑在初始时 $-\Delta\leqslant t\leqslant 0$, 我們取初始函数 $\varphi(t),\varphi_s(t)\quad(s=1,\cdots,n)$ 滿足不等式:

$$|\varphi(t)|\leqslant\eta,\ |\varphi_s(t)|\leqslant\eta\quad(s=1,\cdots,n),$$

其中 $0<\eta<\beta$, 而由此初始函数所确定的方程組(5.2)的解 $x(t),\xi_s(t)(s=1,2,\cdots,n)$ 至少在 $0\leqslant t\leqslant T$ 滿足不等式

$$|\xi_s(t)|\leqslant\beta,\ |x(t)|\leqslant\beta\quad(s=1,2,\cdots,n).$$

而在这段时間区間 $0\leqslant t\leqslant T$ 上,当 $0\leqslant\delta\leqslant\Delta$ 时,我們有:



$$\frac{dV}{dt}<0,$$

$$\therefore\ V(\xi_1(T),\cdots,\xi_n(T))= \\ =V(\xi_1^0,\cdots,\xi_n^0)+\int_0^T\frac{dV}{dt}dt< \\ <V(\xi_1^0,\cdots,\xi_n^0),\qquad(5.3)$$

其中

$$\varphi_s(0)=\xi_s^0\quad(s=1,2,\cdots,n),$$
$$\varphi(0)=x_0.$$

因为 $V(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 是正定的,所以我們只要把初始函数 $\varphi_s(t)\varphi(t)$ 取得适当的小, 則由

(5.3)可推得，当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，有

$$|\xi_s(t)| < A_0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{5.4}$$

且常数 A_0 可以作得任意小，只要初始函数 $\varphi(t)$，$\varphi_s(t)$ 取得适当的小即可。

另外我們再由(5.4)可推出，当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，对应于方程組(3)在 $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$ 时的解 $x_s(t)$ 满足不等式

$$|x_s(t)| < A_0 e^{-\alpha t}. \tag{5.5}$$

由此即知

$$|x_s(t-\delta)| < A_0 e^{\alpha\delta} e^{-\alpha t}. \tag{5.6}$$

从(5.5) 与 (5.6)，对函数 $X(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 及 $Y(x(t-\delta), x_i(t-\delta), \cdots, x_n(t-\delta))$．在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时作如下的正确估值：

$$\begin{aligned}
&|X(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t)) + Y(x_1(t-\delta), \cdots, x_n(t-\delta), x(t-\delta))| \leqslant \\
&\leqslant |X(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t)| + |Y(x_1(t-\delta), \cdots, x_n(t-\delta), x(t-\delta))| \leqslant \\
&\leqslant M_0 A_0 e^{-\alpha t} + M_1 A_0 e^{-\alpha t} e^{\alpha\delta} = (M_0 + M_1 e^{\alpha\delta}) A_0 e^{-\alpha t},
\end{aligned}$$

其中 $M_0 M_1$ 是正的常数．因为由条件：

$$X(x(t), 0 \cdots 0) \equiv 0, \quad Y(x(t-\delta), 0 \cdots 0) \equiv 0,$$

再根据方程組(3)的第一个方程知：

$$\begin{aligned}
x(t) = \varphi(0) + \int_0^t (&X(x(t), x_1(t), \cdots, x_n(t)) + \\
&+ Y(x(t-\delta), x_1(t-\delta), \cdots, x_n(t-\delta)))dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad |x(t)| &< \varphi(0) + (M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}) A_0 \int_0^t e^{-\alpha t} dt = \\
&= \varphi(0) + (M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}) A_0 \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}\right) < \\
&< \varphi(0) + (M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}) \frac{A_0}{\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

現在設 ε 是任意小的正数，在任何情况下，我們都假定它比 β 还要小．这样一来，我們只要适当的选取 η，也即是把初始函数的变化区域取得适当的小，就可使得 A_0 比 ε 小，且还可以使得不等式(5.7)的右端比 ε 还要小．这件事也是完全可以办到的，因为初始函数的变动区域取得适当小，就可使得 $\varphi(0)$ 与 A_0 任意的小，而 $\dfrac{M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}}{\alpha}$ 都是定常数，因此就可使

$$\varphi(0) + \frac{1}{\alpha}(M_0 + M_1 e^{\alpha\Delta}) A_0 < \varepsilon,$$

則从不等式(5.4)与(5.7)推出，对所有 $t \geqslant 0$ 的时間 t 而言，不等式：

$$|\xi_s(t)| \leqslant \beta, \quad |x(t)| \leqslant \beta \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{5.8}$$

被滿足，不等式

$$|\xi_s(t)| < \varepsilon, \quad |x(t)| < \varepsilon \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{5.9}$$

也被滿足．但因为 $\varepsilon < \beta$，因此不等式(5.8)与(5.9)是同时被滿足．实际上，如果条件(5.8)在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时被滿足，而在以后的时間，如果要破坏这不等式，必定存在瞬时 $t_1 = t^* > T_0$，

则在瞬时 $|x(t)|$ 与 $|\xi_s(t)|$ $(s=1,\cdots,n)$ 中至少有一个达到 β 值. 然而这是不可能的,因为在这个瞬时,条件(5.9)还是要被保持的,因此所有的 $|\xi_s(t)|$, $|x_s(t)|$ 将小于 ε.

总之,如果在初始时 $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$, 初始函数 $\varphi(t)$, $\varphi_s(t)$ $(s=1,\cdots,n)$, 满足条件

$$|\varphi(t)| < \eta, \quad |\varphi_s(t)| < \eta \quad (s=1,\cdots,n),$$

则在以后的所有时間, 即 $t \geqslant 0$ 的 t 将满足不等式 (5.9). 又由于 $\xi_s = e^{\alpha t} \cdot x_s$, 故 $x_s(t) = e^{-\alpha t}\xi_s(t)$, 故

$$|x_s(t)| < e^{-\alpha t}\varepsilon \leqslant \varepsilon, \quad 对\ t \geqslant 0.$$

故方程組(3)的平凡解当 $0 \leqslant \delta(t) \leqslant \Delta$ 时是稳定的. 定理証毕.

本文是在秦元勳教授的指导下作成的,作者在此向他致以衷心的謝意.

参 考 文 献

[1] 秦元勳、刘永清、王联: 稳定性理論中的微分方程与微分差分方程的等价性,数学学报, 9(1959), 333—364.
[2] Малкин, И. Г., *Теория Устойчивости Движения*. 莫斯科, 1952, § 28—§ 34.

ON THE EQUIVALENCE PROBLEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DIFFERENCE-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE THEORY OF STABILITY OF THE FIRST CRITICAL CASE

WANG LIAN
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The problem is to investigate the equivalence of stability between the system of differential equations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + Y(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)), \\ \dfrac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} + q_{s\sigma})x_\sigma(t) + (p_s + q_s)x(t) + X_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + \\ \qquad + Y_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \end{cases} \tag{1}$$

and the system of difference-differential equations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + \\ \qquad + Y(x_1(t-\delta(t)), \cdots, x_n(t-\delta(t)), x(t-\delta(t))), \\ \dfrac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma(t) + \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} x_\sigma(t-\delta(t)) + p_s x(t) + q_s x(t-\delta(t)) + \\ \qquad + X_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + \\ \qquad + Y_s(x_1(t-\delta(t)), \cdots, x_n(t-\delta(t)), x(t-\delta(t))) \quad (s = 1,2,\cdots,n), \end{cases} \tag{2}$$

where the $p'_{s\sigma}s$, $q'_{s\sigma}s$, $p'_s s$ and $q'_s s$ are given constants, and $\delta(t)'s$ may be non-negative real constants or non-negative real continuous of t. In order to this problem, we consider first the case of $p_s = 0$, $q_s = 0$ $(s = 1, 2, \cdots, n)$, i.e. to study the eqivalence problem of stability between the system of differential equations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + Y(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)), \\ \dfrac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} (p_{s\sigma} + q_{s\sigma})x_\sigma(t) + X_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + \\ \qquad + Y_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \end{cases}$$

and the system of difference-differential equations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + Y(x_1(t-\delta(t)), \cdots, x_n(t-\delta(t)), x(t-\delta(t))), \\ \dfrac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} p_{s\sigma} x_\sigma(t) + \sum_{\sigma=1}^{n} q_{s\sigma} x_\sigma(t-\delta(t)) + X_s(x_1(t), \cdots, x_n(t), x(t)) + \\ \qquad + Y_s(x_1(t-\delta(t)), \cdots, x_n(t-\delta(t)), x(t-\delta(t))) \quad (s = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

satisfying the following conditions:

(1) $X(x_1, \cdots, x_n, x)$, $Y(x_1, \cdots, x_n, x)$, $X_s(x_1, x_2, \cdots, x_n, x)$ and $Y_s(x, x_1, \cdots, x_n)$ are analytic functions of the variables $x_1, \cdots, x_n, x$ in the neighbourhood of the origin of coodinates, and the orders of the terms of their expansions are not less than two;

(2) All the roots of the characteristic equation

$$D(\chi) \equiv |p_{s\sigma} + q_{s\sigma} - \delta_{s\sigma}\chi| = 0 \quad (s, \sigma = 1, 2, \cdots, n)$$

satisfy the conditions

$$\operatorname{Re}(\chi_i) < 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

(3)
$$X^{(0)}(0, \cdots, 0, x) = gx^m + g_{m+1}x^{m+1} + \cdots \qquad g \neq 0, m \geqslant 2,$$
$$Y^{(0)}(0, \cdots, 0, x) = lx^m + l_{m+1}x^{m+1} + \cdots \qquad l \neq 0, m \geqslant 2,$$
$$X_s^{(0)}(0, \cdots, 0, x) = g_s x^{m_s} + g_s^{(m_s+1)}x^{m_s+1} + \cdots \qquad g_s \neq 0,$$
$$Y_s^{(0)}(0, \cdots, 0, x) = l_s x^{m_s} + l_s^{(m_s+1)}x^{m_s+1} + \cdots \qquad l_s \neq 0;$$

(4) $m_s \geqslant m$.

In the article the second type of method mentioned in [1] is used.

§1. The equivalence of stability

Theorem 1. If m is an odd positive integer and $g + l < 0$, then there exists a positive constant $\Delta = \Delta(X, Y, p_{s\sigma}, q_{s\sigma}, X_s, Y_s) > 0$, such that the trival solution of $(2)'$ is asymptotically stable, provided that the $\delta(t)'s$ satisfy the inequality $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$.

§2. The equivalence of instability

Theorem 2. If m is an odd positive integer and $g + l > 0$, then there exists a positive constant $\Delta = \Delta(X, Y, p_{s\sigma}, q_{s\sigma}, X_s, Y_s) > 0$, such that the trivial solution of $(2)'$ is unstable, provided that the $\delta(t)'s$ satisfy the inequality $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$.

Theorem 3. If m is an even positive integer and $g + l \neq 0$, then there exists a positive constant $\Delta = \Delta(X, Y, p_{s\sigma}, q_{s\sigma}, X, Y) > 0$, such that the trivial solution of $(2)'$ is unstable, provided that the $\delta(t)'s$ satisfy the inequality $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$.

§3. The equivalence of stability in the singular case

Theorem 4. The trivial solution of $(1)'$ is stable, then there exists a positive constant $\Delta = \Delta(X, Y, p_{s\sigma}, q_{s\sigma}, X_s, Y_s) > 0$, such that the trivial solution of $(2)'$ is stable, provided that the $\delta(t)'s$ satisfy the inequality $0 \leqslant \delta \leqslant \Delta$.

§4. The general case

We now return to the case between (1) and (2). We can solve this problem on the basis of the equivalence of $(1)'$ and $(2)'$. Using non-linear transformation

$$x_s = \xi_s + u_s(t) \quad (s = 1, 2, \cdots, n),$$

the system (1) will remain in the same form as the syslem $(1)'$:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \xi_1, \cdots, \xi_n) + Y(x, \xi_1, \cdots, \xi_n),$$
$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma} + q_{s\sigma}) + X_s(x, \xi_1, \cdots, \xi_n) + Y_s(x, \xi_1, \cdots, \xi_n) \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \qquad (1)''$$

where $u_s(x)'s$ $(s = 1, 2, \cdots, n)$ satisfy the following system of equations:

$$f_s(x, x_1, \cdots, x_n) \equiv \sum_{\sigma=1}^{n}(p_{s\sigma} + q_{s\sigma})x_\sigma + (p_s + q_s)x +$$
$$+ X_s(x, x_1, \cdots, x_n) + Y_s(x, x_1, \cdots, x_n) = 0 \quad (s = 1, \cdots, n),$$

where $x_s = u_s(x)$ $(s = 1, \cdots, n)$ are analytic functions of x for sufficiently small $|x|$.

第10卷 第1期　　数 学 学 报　　Vol. 10, No. 1
1960 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　March, 1960

有时滞的系統的无条件稳定性*

秦 元 勳
(中国科学院数学研究所)

§ 1. 問題的提出及解法

錢学森在[1]中提出了有时滞的系統的无条件稳定性的問題，并叙述了 Satche 的作图法．对于有时滞的系統的稳定性問題，一般化为超越方程的根的实部的符号的判定問題，这方面有 Понтрягин[2]，Мейман 及 Чеботарёв[3]，Hayes[4] 及 Bellman[5] 等人的工作．在工程处理方面，除上述 Satche 方法外，还有 Ципкин[6] 等人的工作．

我們的研究結果表明，对于无条件稳定性的判定問題，并不需要用到超越方程的理論，而只需要用到代数方程的实根的判定便足够解决問題．从一想法出发使得由于考虑超越方程所引起的困难得以避免，从而問題得到順利解决．

应用这一观点，本文給出了一般的代数处理方法，并具体給出 $n=1,2$ 的明显判定公式，提供工程設計之用．

§ 2. 无条件稳定性的代数判定

定义． 已給一有时滞的常系数的系統

$$\frac{dx_s(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{s_j}x_j(t)+b_{s_j}x_j(t-\tau)\right)\quad(s=1,2,\cdots,n).\tag{1}$$

如果对任何 $\tau\geqslant 0$，(1)之零解均为漸近稳定，则称系統(1)为无条件稳定．

引入記号及特征方程

$$\Delta(\lambda;\tau)\equiv|a_{s_j}+b_{s_j}e^{-\tau\lambda}-\delta_{s_j}\lambda|=0,\tag{2}$$

则有下之結果：

定理 1． 系統(1)为无条件稳定的充分而且必要条件是

(i)
$$\Delta(\lambda;0)\equiv|a_{s_j}+b_{s_j}-\delta_{s_j}\lambda|=0\tag{3}$$

之根之实部均为負的．

(ii) 对于任何实数 y 及任何实数 $\tau\geqslant 0$ 均有

$$\Delta(iy,\tau)\equiv|a_{s_j}+b_{s_j}e^{-\tau iy}-\delta_{s_j}(iy)|\neq 0.\tag{4}$$

証． 条件是必要的．因为如果条件 (i) 不成立，则 $\tau=0$ 时，系統(1)便不是漸近稳定的．又如果有实数 y 及 $\tau\geqslant 0$ 使

$$\Delta(iy,\tau)=0,$$

则对这个 τ，系統(1)有虛的特征根，因此不是漸近稳定的．必要性証毕．

充分性的証明是利用这样的事实，卽只需要証明对 $\tau\geqslant 0$，(2) 之特征根之实部都是負的卽可．

---

* 1960 年 1 月 13 日收到．

将 $\Delta(\lambda;\tau)$ 展为 λ 之多項式:

$$\Delta(\lambda;\tau) \equiv (-1)^n\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

此地 A_n 是 a_{s_j}, b_{s_j} 及 $e^{-\tau\lambda}$ 之多項式.

注意到 a_{s_j}, b_{s_j} 均为已給常数. 而

$$|e^{-\tau\lambda}| \leqslant 1, \quad 当 \tau \geqslant 0 及 \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0.$$

由此,在 $\tau \geqslant 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ 时 $|A_k|$ 为有界. 用 K_1 記此界:

$$K_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|, \quad 当 \tau \geqslant 0, \ \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0.$$

取

$$R = \max(1, (n+1)K_1) > 0,$$

则当 $|\lambda| \geqslant R$ 及 $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$, 便有

$$|(-1)^n\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n| \geqslant |\lambda|^n\left[1 - \frac{|A_1|}{|\lambda|} - \cdots - \frac{|A_n|}{|\lambda|^n}\right] \geqslant$$

$$\geqslant R^n\left[1 - \frac{nK_1}{(n+1)K_1}\right] > 0.$$

由此可見,在 $|\lambda| \geqslant R$ 及 $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ 中,对任何 $\tau \geqslant 0$, (2)均无根. 故可不考虑这区域.

由条件 (i) 知,当 $\tau = 0$ 时, (2)之根都在 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ 半平面. 現当 $\tau \neq 0$ 时,特征根要在 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ 之可能性只有当某一 τ 时, λ 在 $-R$ 到 R 之間穿过 λ 平面上之虛軸 (如图 1),但是条件(ii)不容許(2)之根跑到 λ 平面之虛軸上,故这些特征根必然留在 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ 半平面. 充分性証毕.

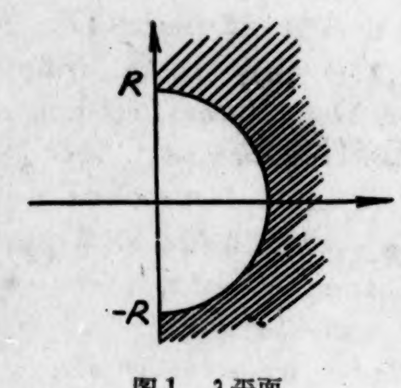


图 1 λ 平面

注意 1. 由証明可見条件 (ii) 可減弱到

$$-R < y < R,$$

而不必要 $-\infty < y < \infty$, 这里实际上沒有区别.

注意 2. 条件 (i) 之判定有传統的 Routh-Hurwicz 方法, 因此全部問題归結到 (ii) 之研究.

現在轉到条件 (ii) 之分析.

这里又分两个方面: $y = 0$ 及 $y \neq 0$.

对 $y = 0$, 条件 (ii) 等于

$$\Delta(io, \tau) \equiv |a_{s_j} + b_{s_j}| \neq 0, \tag{5}$$

对任何 τ 均一样,故不必討論,并且这一条件已包含于条件 (i) 中. 对 $y \neq 0$,则引入我們解决問題的关鍵想法. 这时由于 τ 是任意非負实数, $y \neq 0$, 故当 τ 由 0 变到 $\left|\frac{2\pi}{y}\right|$ 时, $-\tau y$ 由 0 变到 $\pm 2\pi$, 因此 $e^{-\tau iy}$ 在单位圓上繞了一周. 这便說明对 $y \neq 0$, $e^{-\tau iy}$ 可作为与 y 无关之一值. 更确切地說,引入

$$\omega = -\tau y,$$

则条件 (ii) 化为要求条件(5)及下述之条件:

对任何非零之实 y 及任何实 ω

$$F(y, \omega) \equiv |a_{s_j} + b_{s_j}e^{i\omega} - \delta_{s_j}(iy)| \neq 0. \tag{6}$$

形式上看来,这里沒有消去超越函数 $e^{i\omega}$ 所引起的困难. 但这里由于 ω 与 y 为独立变量,

因此，可以由(6)将实部及虚部分开：

$$F(y,\omega)\equiv U(y,\omega)+iV(y,\omega). \tag{7}$$

再命

$$U(y,\omega)=0,\quad V(y,\omega)=0, \tag{8}$$

由(8)消去 ω (或 y) 便得到 y (或 $\cos\omega, \sin\omega$) 之多項式：

$$H(y)=0\quad (\text{或 } H(\cos\omega,\ \sin\omega)=0), \tag{9}$$

这时只要判定两点：或者(9)式之 y 无非零的实根，这时(6)显然成立；或者(9)式之 y 虽有非零实根，但这种实根代入(8)时所得之方程組沒有实的公根 ω，則(6)也显然成立。并且要(6)成立，显然要判定这两点。

值得特别提出的是，判定这两点都是代数方程的問題，这里已經沒有超越方程的求根問題。

总結如下：

定理 2. 系統(1)为无条件稳定之充分而且必要条件是

(i)
$$\Delta(\lambda;0)\equiv|a_{s_j}+b_{s_j}-\delta_{s_j}\lambda|=0 \tag{3}$$

之根之实部均为負的。

(ii) (9)式中或者 y 无非零实根，或者 y 有非零实根，但对此实 y 值，(8)无公共实根 ω。

也可用下面的条件代替 (ii)：

(ii)′ (9)式中 ω 无实根，或 ω 虽有实根，但对此实 ω 值，(8)无非零公共实公根 y。

現在举例来說明具体的运算过程及結果。

例 1. $n=1$ 时系統(1)的无条件稳定性

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)+bx(t-\tau),$$

$$\Delta(\lambda;\tau)\equiv a+be^{-\lambda\tau}-\lambda=0.$$

条件 (i) 即

$$\Delta(\lambda;0)=a+b-\lambda=0$$

之根 $\lambda=-(a+b)$ 有負实部，亦即

$$a+b<0.$$

条件 (ii) 便是

$$F(y,\omega)\equiv(a+b\cos\omega)+i(-y+b\sin\omega)\equiv U(y,\omega)+iV(y,\omega).$$

由

$$U\equiv(a+b\cos\omega)=0$$

及

$$V\equiv(-y+b\sin\omega)=0,$$

消去例如 ω，便有

$$H(y)\equiv y^2+a^2-b^2=0.$$

要 $H(y)$ 无非零实根之充要条件是

$$b^2-a^2\leqslant 0.$$

其次对 $H(y)$ 有非零实根时，则

$$y^2 = b^2 - a^2 > 0.$$

故 $b \neq 0$，由此可由 $U = 0$ 及 $V = 0$ 消得

$$\tan\omega = -\frac{y}{a}.$$

对任何实 y, ω 均有实解，故 $U = 0$ 及 $V = 0$ 均有实的 ω 公根.

总結可得无条件稳定性之充要条件是

(i) $$a + b < 0,$$

(ii) $$b^2 - a^2 \leqslant 0.$$

亦或写成

$$a + b < 0, \quad b - a \geqslant 0.$$

其无条件稳定区如图 2 中有直紋之部分所示.

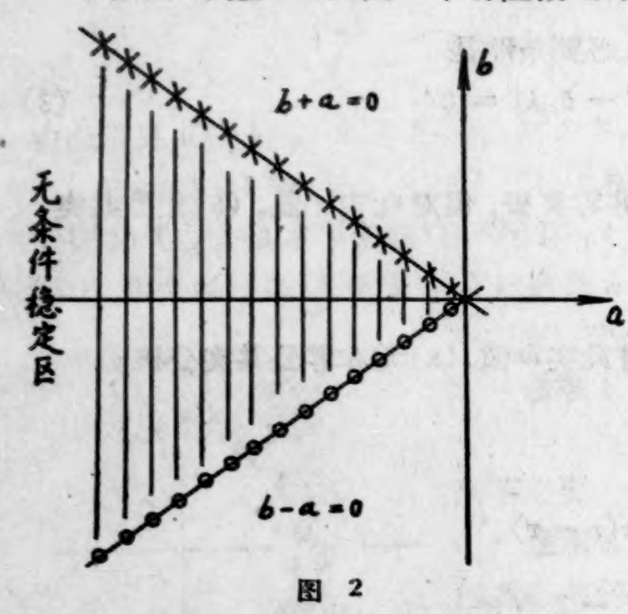


图 2

在边界上 $b + a = 0$ 上打(×)表示不是无条件稳定区中之点. 原点也是这类.

在边界上 $b - a = 0$ 上打(○)表示是无条件稳定区中之点.

其他之点均不属于无条件稳定区.

例 2. 具有时滞反饋的一个綫性振动系統

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) + cx(t-\tau) = 0,$$

$$\Delta(\lambda;\tau) \equiv \lambda^2 + a\lambda + b + ce^{-\tau\lambda} = 0.$$

条件 (i) 即

$$\Delta(\lambda;0) \equiv \lambda^2 + a\lambda + (b + c) = 0$$

之根之实部为負的，亦即要求

$$a > 0, \quad b + c > 0.$$

条件 (ii) 即

$$F(y,\omega) \equiv U(y,\omega) + iV(y,\omega) \equiv (-y^2 + b + c\cos\omega) + i(ay + c\sin\omega).$$

由

$$U \equiv -y^2 + b + c\cos\omega = 0$$

及

$$V \equiv ay + c\sin\omega = 0,$$

消去 ω 得到

$$H(y) \equiv y^4 + y^2A + B = 0,$$

此地

$$A = a^2 - 2b, \quad B = b^2 - c^2.$$

要 $F(y) = 0$ 无非零实根，则因

$$y = \pm\sqrt{\frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}}.$$

故其充要条件是

或者　　$A^2 - 4B < 0$,

或者　　$A^2 - 4B = 0$ 及 $A \geqslant 0$,

或者　　$A^2 - 4B > 0$, $B > 0$, $A > 0$,

或者　　$A^2 - 4B > 0$, $B = 0$, $A \geqslant 0$.

也可簡化为

或者　　$A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$,

或者　　$A < 0$, $A^2 - 4B < 0$.

至于 $F(y) = 0$ 有非零之实根，則由 $V = 0$ 可得出实的 ω，这个 ω 也将滿足 $U = 0$. 故不討論.

总結得到无条件稳定之充要条件是

(i)　$a \geqslant 0$,　$b + c > 0$;

(ii) 命 $A = a^2 - 2b$, $B = b^2 - c^2$,

則下面两者之一成立:

或　$A \geqslant 0$ 及 $B \geqslant 0$,

或　$A < 0$, $A^2 - 4B < 0$.

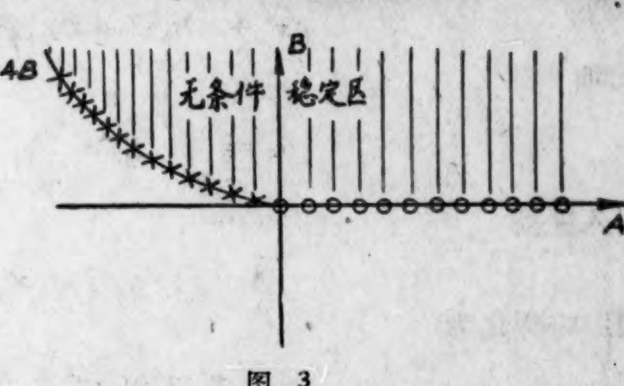


图 3

A 及 B 所滿足之条件如图 3 所示.

§ 3. 四次代数方程有实根之条件

为了解决 $n = 2$ 时(1)之无条件稳定性，我們需要四次方程无实根之充要条件.

定理 3.　四次方程

$$f(x) \equiv a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0,$$

$a_0 \neq 0$, 沒有实根之充分而且必要条件是下列三种情形之一成立:

(甲)　　$a_1^2 > a_0 a_2$.

并且下面二組条件之一成立

(甲)$_1$　　$\Delta > 0$,

(甲)$_2$　　$\Delta = 0$,

$$2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3 = 0,$$

$$-3a_1^4 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 4a_0^2 a_1 a_3 + a_4 c_0^3 = 9[a_0 a_2 - a_1^2]^2.$$

(乙)　　$a_1^2 = a_0 a_2$,　$\Delta > 0$,

(丙)　　$a_1^2 < a_0 a_2$,　$\Delta > 0$,

$$-3a_1^4 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 4a_0^2 a_1 a_3 + a_4 c_0^3 > 9[a_0 a_2 - a_1^2],$$

此地

$$\Delta \equiv I^3 - 27J^2 \equiv \frac{a_0^6}{256} \pi(x_i - x_j),$$

x_i 是 $f(x)$ 之四个根.

$$I = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$J = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & c_4 \end{vmatrix}.$$

注意

$$-3a_1^4+6a_0a_1^2a_2-4a_0^2a_1a_3+a_4a_0^3=a_0^3f\left(-\frac{a_1}{a_0}\right).$$

証. 由普通方程式論已知

$\Delta<0$，則 $f(x)=0$ 有两实根两复根.

$\Delta>0$，則 $f(x)=0$ 有四实根或四复根.

因此，只要判定 $\Delta\geqslant 0$ 时的情形.

为此，将 $f(x)=0$ 之形式簡化，減少其参数，以便討論.

因 $a_0\neq 0$，故原式可用 a_0 除之，得：

$$x^4+4B_1x^3+6B_2x^2+4B_3x+B_4=0,$$

此地

$$B_1=\frac{a_1}{a_0},\ B_2=\frac{a_2}{a_0},\ B_3=\frac{a_3}{a_0},\ B_4=\frac{a_4}{a_0}.$$

引入变换

$$y=x+B_1,$$

則原方程化为

$$y^4+6C_2y^2+4C_3y+C_4=0,$$

此地

$$C_2=B_2-B_1^2,$$
$$C_3=2B_1^3-3B_1B_2+B_3,$$
$$C_4=-3B_1^4+6B_2B_1^2-4B_1B_3+B_4.$$

以下将分为三种情形来研究：

$$C_2>0,\ C_2=0,\ C_2<0.$$

(甲) $C_2>0$ 之情形.

引入变換 $$y=Kz=\sqrt{C_2}z,$$

則方程化为

$$z^4+6z^2+4A_3z+A_4=0,$$

此地

$$A_3=C_3K^{-3},\quad A_4=C_4K^{-4}.$$

对于这种特殊类型的四次方程，由于只有两个参数 A_3, A_4，我們便可在 (A_3, A_4) 参数平面上来作图. 对一个实 z，这个方程表示一条 A_3A_4 平面上之直綫，当 z 变动时，这些直綫在 A_3A_4 平面扫过的区域容易求出. 求这直綫族的包綫得到方程为

$$\Delta\equiv(A_4+3)^3-27(A_4-1-A_3^2)^2=0.$$

这只要由目前

$$A_0=1,\ A_1=0,\ A_2=1,\ A_3,\ A_4$$

代入公式有

$$I=A_4+3,\quad J=A_4-1-A_3^2,$$

而 $\Delta\equiv I^3-27J^2$ 即得.

也可由

$$z^4+6z^2+4A_3z+A_4=0$$

及其微分

$$4z^3+12z+4A_3=0$$

消去 z 得到。

$\Delta=0$ 是一条高阶抛物綫如图 4.

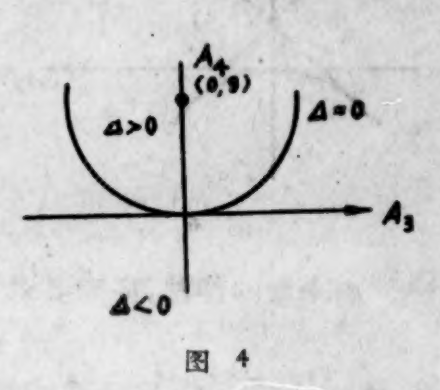


图 4

这时有一点值得注意的是 $\Delta=0$ 之图形除这抛物綫外，还有一个孤立点：

$$A_3=0,\quad A_4=9,$$

但这点是沒有实的 z 使直綫过此点，故这点所对应之方程也无实根。

总結得到：

情形(甲)无实根之充要条件是下列两情形之一成立：

(甲)$_1$　　　　$\Delta>0$,

(甲)$_2$　　　　$\Delta=0,\ A_3=0,\ A_4=9.$

这便是定理 3 所要的条件(甲)$_1$及(甲)$_2$.

(乙) $C_2=0$ 之情形. 方程已是

$$z^4+4A_3z+A_4=0$$

之形式. 此地

$$A_3=C_3,\quad A_4=C_4,$$

这时由于

$$A_0=1,\ A_1=A_2=0,\ A_3,\ A_4$$

故有

$$I=A_4,\quad J=-A_3^2,$$

$$\Delta\equiv A_4^3-27A_3^4,$$

这时 $\Delta=0$ 如图 5.

图 5

故所要的充要条件便是 $\Delta>0$. 这便是定理中所要的(乙)之条件.

(丙) $C_2<0$ 之情形. 用变换

$$y=Kz=\sqrt{|C_2|}z,$$

则方程化为

$$z^4-6z^2+4A_3z+A_4=0,$$

此地

$$A_3=C_3K^{-3},\quad A_4=C_4K^{-4}.$$

由于这时

$$A_0=1,\ A_1=0,\ A_2=-1,\ A_3,\ A_4,$$

便有

$$I=A_4+3,\quad J=-A_4+1-A_3^2,$$

$$\Delta\equiv(A_4+3)^3-27(-A_4+1-A_3^2)^2,$$

这时 $\Delta = 0$ 如图 6 所示. 这时 $\Delta > 0$ 分为两个区域，在 曲边三角形内部是四实根的区域，在 A_4 正方向的那二条曲綫所夹的部分是四复根区域. 外面其他部分是二实根二复根区域.

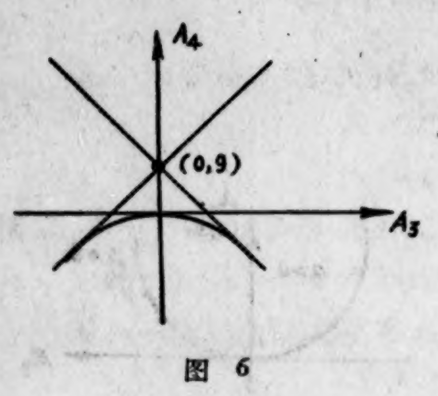


图 6

四实根与四复根之分界点在 $A_3 = 0$, $A_4 = 9$. 由此即得所要的无实根的充要条件是

$$\Delta > 0, \quad A_4 > 9.$$

这便是定理中(丙)的条件，定理 3 証毕.

在下面我們还要进一步要求研究

$$f(x) \equiv a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0,$$

$a_0 \neq 0$, 在 $|x| \leqslant 1$ 中无实根的充要条件.

用上面的作法，亦即要求

$$y^4 + 6C_2 y^2 + 4C_3 y + C_4 = 0$$

在 $B_1 - 1 \leqslant y \leqslant B_1 + 1$ 中无实根之充要条件.

以下仍分三种情形研究之

(甲) $C_2 > 0$, 引入 $y = \sqrt{C_2} z$, 即要求

$$L(z; A_3, A_4) \equiv z^4 + 6z^2 + 4A_3 z + A_4 = 0$$

在

$$z_1 = \frac{B_1 - 1}{\sqrt{C_2}} \leqslant z \leqslant \frac{B_1 + 1}{\sqrt{C_2}} = z_2$$

中无实根. 引入

$$l(z) \equiv -z^3 - 3z,$$

注意到，当 z 在 $[z_1, z_2]$ 中变动时，$A_3 A_4$ 平面上之直綫 $L(z; A_3, A_4) = 0$ 所扫过之区域如图 7 中之有斜紋之部分. 因此，无实根之充要条件是 (A_3, A_4) 滿足下面三組条件之一:

(甲)$_1$ $L(z_1; A_3, A_4) < 0$,

$L(z_2; A_3, A_4) < 0$;

(甲)$_2$ 当 $A_3 \geqslant l(z_2)$,

$L(z_2; A_3, A_4) > 0$,

当 $l(z_1) \leqslant A_3 \leqslant l(z_2)$,

$\Delta(A_3, A_4) > 0$,

当 $A_3 \leqslant l(z_1)$,

$L(z_1; A_3, A_4) > 0$.

(甲)$_3$ $A_3 = 0$, $A_4 = 9$.

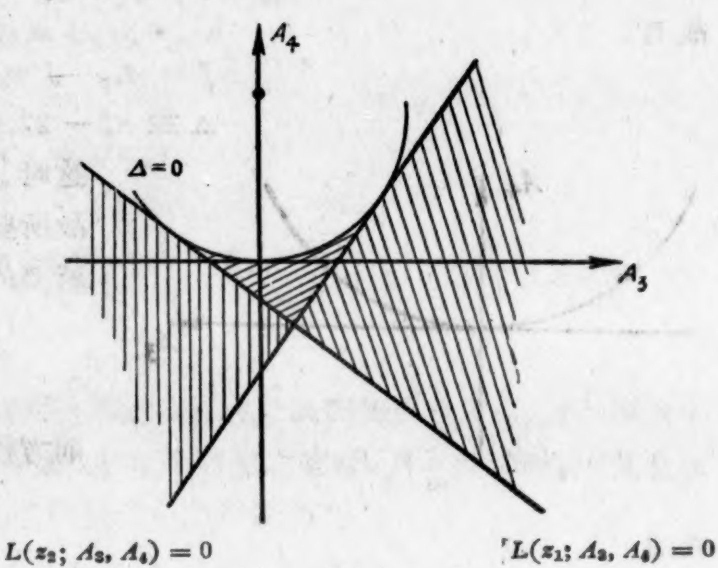


图 7

故(甲)类之情形研究毕.

(乙) $C_2 = 0$. 此时

$$L(z; A_3, A_4) \equiv z^4 + 4A_3 z + A_4 = 0,$$

$$z_1 = B_1 - 1, \quad z_2 = B_1 + 1,$$

$$l(z) \equiv -z^3,$$

这时要方程无实根之充要条件是满足下列两組条件之一：

(乙)$_1$　　$L(z_1; A_3, A_4) < 0$，　$L(z_2; A_3, A_4) < 0$；

(乙)$_2$　　当 $A_3 \geqslant l(z_2)$，　$L(z_2; A_3, A_4) > 0$，

当 $l(z_1) \leqslant A_3 \leqslant l(z_2)$，　$\Delta(A_3, A_4) > 0$，

当 $A_3 \leqslant l(z_1)$，　$L(z_1; A_3, A_4) > 0$.

最后研究情形(丙)．$C_2 < 0$.

$$L(z; A_3, A_4) \equiv z^4 - 6z^2 + 4A_3 z + A_4 = 0,$$

$$z_1 = \frac{B_1 - 1}{\sqrt{|C_2|}}, \quad z_2 = \frac{B_1 + 1}{\sqrt{|C_2|}},$$

$$g(z) \equiv -z^3 + 3z, \quad \Delta(A_3, A_4) \equiv (A_4 + 3)^3 - 27(-A_4 + 1 - A_3^2)^2,$$

则这时，$z = \pm 1$ 及 $\pm\sqrt{3}$ 是四个分界点．这四个分界点中可能有一个，二个，三个或四个在区間 $[z_1, z_2]$ 中．也可能一个都不在 $[z_1, z_2]$ 中．对不同之情形有不同的条件．

現在研究 A_3A_4 平面上之直綫 $L(z; A_3, A_4) = 0$ 当 $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ 时所扫过之区域．先作五种基本区域，再作一般情形．

第一类情形：$z_1 < z_2 \leqslant -\sqrt{3}$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$L(z_1) \geqslant 0$，$L(z_2) \leqslant 0$；

$L(z_1) \leqslant 0$，$L(z_2) \geqslant 0$；

$L(z_1) \geqslant 0$，$L(z_2) \geqslant 0$，$\Delta \leqslant 0$，$g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1)$.

第二类情形：$-\sqrt{3} \leqslant z_1 < z_2 < -1$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$L(z_1) \leqslant 0$，$L(z_2) \geqslant 0$；

$L(z_1) \geqslant 0$，$L(z_2) \leqslant 0$；

$L(z_1) \geqslant 0$，$L(z_2) \geqslant 0$，$\Delta \geqslant 0$，$g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1)$.

第三类情形：$-1 \leqslant z_1 < z_2 < 1$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$L(z_1) \leqslant 0$，$L(z_2) \geqslant 0$；

$L(z_1) \geqslant 0$，$L(z_2) \leqslant 0$；

$L(z_1) \leqslant 0$，$L(z_2) \leqslant 0$，$\Delta \geqslant 0$，$g(z_1) \leqslant A_3 \leqslant g(z_2)$.

第四类情形：$1 \leqslant z_1 < z_2 < \sqrt{3}$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$L(z_1) \leqslant 0$，$L(z_2) \geqslant 0$；

$L(z_1) \geqslant 0$，$L(z_2) \leqslant 0$；

$L(z_1) \geqslant 0$，$L(z_2) \geqslant 0$，$\Delta \geqslant 0$，$g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1)$.

第五类情形：$\sqrt{3} \leqslant z_1 < z_2$．这时扫过之区域是下面三块之总和：

$L(z_1) \leqslant 0$，$L(z_2) \geqslant 0$；

$L(z_1) \geqslant 0$，$L(z_2) \leqslant 0$；

$L(z_1) \geqslant 0$，$L(z_2) \geqslant 0$，$\Delta \leqslant 0$，$g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1)$.

研究了这五种类型，則一般情形是用下面方法得到的：

$\pm\sqrt{3}$，± 1 四点将 $[z_1, z_2]$ 分为若干段，每段利用上面的一种作法得到三块区域．这些区域之全体总和便是在 A_3A_4 平面上(当 z 在 $[z_1, z_2]$ 变动时) $L(z; A_3, A_4) = 0$ 直

綫扫过之全部面积.

$\pm\sqrt{3}$, ± 1 四点与 $[z_1, z_2]$ 之关系可有 $\sum_{i=1}^{5} i = 15$ 种可能的組合，其他五种已如上述，其他十种可由上面五种組成.

为了书写簡单起見，我們引入三个記号 $R_1(\alpha,\beta)$ 表示 A_3A_4 平面上下面两种点的全体：

$$L(\alpha; A_3, A_4)L(\beta; A_3, A_4) \leqslant 0$$

及

$$L(\alpha; A_3, A_4) \geqslant 0, \quad L(\beta; A_3, A_4) \geqslant 0$$
$$\Delta(A_3, A_4) \leqslant 0, \quad g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1).$$

$R_2(\alpha,\beta)$ 表示 A_3A_4 平面上下面两种点的全体：

$$L(\alpha; A_3, A_4)L(\beta; A_3, A_4) \leqslant 0$$

及

$$L(\alpha; A_3, A_4) \geqslant 0, \quad L(\beta; A_3, A_4) \geqslant 0,$$
$$\Delta(A_3, A_4) \geqslant 0, \quad g(z_2) \leqslant A_3 \leqslant g(z_1).$$

$R_3(\alpha,\beta)$ 表示 A_3A_4 平面上下面两种点之全体：

$$L(\alpha; A_3, A_4)L(\beta; A_3, A_4) \leqslant 0$$

及

$$L(\alpha; A_3, A_4) \leqslant 0, \quad L(\beta; A_3, A_4) \leqslant 0,$$
$$\Delta(A_3, A_4) \geqslant 0, \quad g(z_1) \leqslant A_3 \leqslant g(z_2).$$

利用这三种符号可以把上述十五种情形具体写下来：

当 z 在 $[z_1, z_2]$ 中变动时，直綫 $L(z; A_3, A_4) = 0$ 在 A_3A_4 平面上扫过之区域如下：

当 $z_1 < z_2 \leqslant -\sqrt{3}$, 則为 $R_1(z_1, z_2)$;

当 $z_1 \leqslant -\sqrt{3} \leqslant z_2 \leqslant -1$; 則为 $R_1(z_1, -\sqrt{3})$ 及 $R_2(-\sqrt{3}, z_2)$ 之总和；

当 $z_1 \leqslant -\sqrt{3} < -1 \leqslant z_2 \leqslant 1$, 則为 $R_1(z_1, -\sqrt{3})$, $R_2(-\sqrt{3}, -1)$ 及 $R_3(-1, z_2)$ 之总和；

当 $z_1 \leqslant -\sqrt{3} < -1 < 1 \leqslant z_2 \leqslant \sqrt{3}$, 則为 $R_1(z_1, -\sqrt{3})$, $R_2(-\sqrt{3}, -1)$, $R_3(-1, 1)$ 及 $R_2(1, z_2)$ 之总和；

当 $z_1 \leqslant -\sqrt{3} < -1 < 1 < \sqrt{3} \leqslant z_2$, 則为 $R_1(z_1, -\sqrt{3})$, $R_2(-\sqrt{3}, -1)$, $R_3(-1, 1)$, $R_2(1, 3)$ 及 $R_1(3, z_2)$ 之总和；

当 $-\sqrt{3} \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant -1$, 則为 $R_2(z_1, z_2)$;

当 $-\sqrt{3} \leqslant z_1 \leqslant -1 \leqslant z_2 \leqslant 1$, 則为 $R_2(z_1, -1)$ 及 $R_3(-1, z_2)$ 之总和；

当 $-\sqrt{3} \leqslant z_1 \leqslant -1 < 1 \leqslant z_2 \leqslant \sqrt{3}$, 則为 $R_2(z_1, -1)$, $R_3(-1, 1)$ 及 $R_2(1, z_2)$ 之总和；

当 $-\sqrt{3} \leqslant z_1 \leqslant -1 < 1 < \sqrt{3} \leqslant z_2$, 則为 $R_2(z_1, -1)$, $R_3(-1, 1)$, $R_2(1, \sqrt{3})$ 及 $R_2(\sqrt{3}, z_2)$ 之总和；

当 $-1 \leqslant z_1 < z_2 \leqslant 1$, 則为 $R_3(z_1, z_2)$;

当 $-1 \leqslant z_1 \leqslant 1 \leqslant z_2 \leqslant \sqrt{3}$, 則为 $R_3(z_1, 1)$ 及 $R_2(1, z_2)$ 之总和；

当　$-1 \leqslant z_1 \leqslant 1 < \sqrt{3} \leqslant z_2$，则为 $R_3(z_1, 1)$，$R_2(1, \sqrt{3})$ 及 $R_1(\sqrt{3}, z_2)$ 之总和；

当　$1 \leqslant z_1 < z_2 \leqslant \sqrt{3}$，则为 $R_2(z_1, z_2)$；

当　$1 \leqslant z_1 \leqslant \sqrt{3} \leqslant z_2$，则为 $R_2(z_1, \sqrt{3})$ 及 $R_1(\sqrt{3}, z_2)$ 之总和；

当　$\sqrt{3} \leqslant z_1 < z_2$，则为 $R_1(z_1, z_2)$.

上面十五种的规律是很強的，即是将 $[z_1, z_2]$ 用 $\pm\sqrt{3}$，± 1 四点分为若干段，在下面五段

$$z \leqslant -\sqrt{3},\ -\sqrt{3} \leqslant z \leqslant -1,\ -1 \leqslant z \leqslant 1,$$
$$1 \leqslant z \leqslant \sqrt{3},\ z \geqslant \sqrt{3}$$

中分别用 R_1, R_2, R_3, R_2, R_1 区域即可．为此，我們以后便可再簡化为記号

$$R(z_1, z_2).$$

它表示上述十五种情形之一种，具体表示那一种則依 $[z_1, z_2]$ 与 $\pm\sqrt{3}$，± 1 四点之关系而定．

总結得到下面之定理．

定理 4.　四次方程

$$f(x) \equiv a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0,$$

$a_0 \neq 0$，在 $|x| \leqslant 1$ 中无实根之充要条件是下面三种情形之一成立：

記

$$C_2 = \left(\frac{a_2}{a_0}\right) - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2,$$
$$C_3 = 2\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 - 3\left(\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\frac{a_2}{a_0}\right) + \left(\frac{a_3}{a_0}\right),$$
$$C_4 = -3\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^4 + 6\left(\frac{a_2}{a_0}\right)\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 4\left(\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\frac{a_3}{a_0}\right) + \left(\frac{a_4}{a_0}\right).$$

（甲）$C_2 > 0$．記

$$A_3 = C_3|(C_2)^{-3/2}|,\quad A_4 = C_4(C_2)^{-2},$$
$$z_1 = \frac{\dfrac{a_1}{a_0} - 1}{\sqrt{C_2}},\quad z_2 = \frac{\dfrac{a_1}{a_0} + 1}{\sqrt{C_2}},$$
$$l(z) \equiv -z^3 - 3z,$$
$$L(z; A_3, A_4) \equiv z^4 + 6z^2 + 4A_3 z + A_4,$$
$$\Delta \equiv (A_4 + 3)^3 - 27(A_4 - 1 - A_3^2)^2.$$

則要求 A_3, A_4 滿足下列三組条件之一：

（甲）$_1$　　$L(z_1; A_3, A_4) < 0$，　$L(z_2; A_3, A_4) < 0$，

（甲）$_2$　　当 $A_3 \geqslant l(z_2)$，　$L(z_2; A_3, A_4) > 0$；

当　　$l(z_1) \leqslant A_3 \leqslant l(z_2)$，

$\Delta(A_3, A_4) > 0$；

当　　$A_3 \leqslant l(z_1)$，　$L(z_1; A_3, A_4) > 0$.

(甲)$_3$ $$A_3=0,\quad A_4=9.$$

下面是第二种情形.

(乙) $C_2=0$. 記

$$A_3=C_3,\quad A_4=C_4,$$

$$z_1=\frac{a_1}{a_0}-1,\quad z_2=\frac{a_1}{a_0}+1,$$

$$l(z)=-z^3,\quad L(z;A_3,A_4)\equiv z^4+4zA_3+A_4,$$

$$\Delta\equiv A_4^3-27A_3^4.$$

则要求 A_3, A_4 满足下列两組条件之一:

(乙)$_1$ $$L(z_1;A_3,A_4)<0,\quad L(z_2;A_3,A_4)<0;$$

(乙)$_2$

$$\text{当 } A_3\geqslant l(z_2),\quad L(z_2;A_3,A_4)>0;$$

$$\text{当 } l(z_1)\leqslant A_3\leqslant l(z_2),\quad \Delta(A_3,A_4)>0;$$

$$\text{当 } A_3\leqslant l(z_1),\quad L(z_1;A_3,A_4)>0.$$

下面是第三种情形.

(丙) $C_2<0$. 記

$$A_3=C_3|(|C_2|)|^{-3/2},\quad A_4=C_4(|C_2|)^{-2},$$

$$z_1=\frac{\frac{a_1}{a_0}-1}{\sqrt{|C_2|}},\quad z_2=\frac{\frac{a_1}{a_0}+1}{\sqrt{|C_2|}},$$

$$g(z)\equiv-z^3+3z,$$

$$L(z;A_3,A_4)\equiv z^4-6z^2+4A_3z+A_4,$$

$$\Delta\equiv(A_4+3)^3-27(-A_4+1-A_3^2)^2,$$

$$R_1(\alpha,\beta),\ R_2(\alpha,\beta),\ R_3(\alpha,\beta),\ R(\alpha,\beta)$$

如上面的定义.

则要求 (A_3, A_4) 不在 $R(z_1,z_2)$ 中.亦即要求 (A_3,A_4) 在 A_3A_4 平面上 $R(z_1,z_2)$ 之补集中. 用 $\bar{R}(z_1,z_2)$ 記此补集,则要求 (A_3,A_4) 属于这个补集.

注意到 $R(z_1,z_2)$ 是若干个 $R_i(\alpha,\beta)$ 之和,以 $\bar{R}_i(\alpha,\beta)$ 記这些 $R_i(\alpha,\beta)$ 之补集,则由

$$R=\cup R_i,$$

有

$$\bar{R}=\cap\bar{R}_i.$$

因此,要求 (A_3, A_4) 在 $\bar{R}$ 中,即要求 (A_3, A_4) 在 $\bar{R}_i$ 之交集中,故要 (A_3, A_4) 同时满足这些 $\bar{R}_i$ 之条件,则为充分而且必要.

上述情形虽然复杂,但是都只用到系数的加减乘除乘方开方,因此是代数判定. 这里不只判定实根之有无,而且由 (A_3,A_4) 知道它的个数.

§4. $n=2$ 时(1)为无条件稳定之充要条件

現在研究系統

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= a_1x(t) + a_2x(t-\tau) + b_1y(t) + b_2y(t-\tau),\\ \frac{dy(t)}{dt} &= c_1x(t) + c_2x(t-\tau) + d_1y(t) + d_2y(t-\tau).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

特征方程为

$$\Delta(\lambda;\tau) \equiv \begin{vmatrix} a_1 + a_2e^{-\lambda\tau} - \lambda & b_1 + b_2e^{-\lambda\tau} \\ c_1 + c_2e^{-\lambda\tau} & d_1 + d_2e^{-\lambda\tau} - \lambda \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv A_1 + A_2e^{-\lambda\tau} + A_3e^{-2\lambda\tau} + A_4\lambda + A_5\lambda e^{-\lambda\tau} + \lambda^2 = 0,$$

此地

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \left[\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix}\right],$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad A_4 = -a_1 - d_1, \quad A_5 = -a_2 - d_2.$$

用 $\lambda = iy$, $-\lambda\tau = i\omega$ 代入 $\Delta(\lambda,\tau)$，則有

$$D(y,\omega) \equiv \begin{vmatrix} a_1 + a_2e^{i\omega} - iy & b_1 + b_2e^{i\omega} \\ c_1 + c_2e^{i\omega} & d_1 + d_2e^{i\omega} - iy \end{vmatrix} \equiv U(y,\omega) + iV(y,\omega),$$

此地

$$U(y,\omega) \equiv [A_1 + A_2\cos\omega + A_3\cos 2\omega] + [-A_5\sin\omega]y - y^2,$$
$$V(y,\omega) \equiv [A_2\sin\omega + A_3\sin 2\omega] + [A_4 + A_5\cos\omega]y.$$

由定理 1 知(10)为无条件稳定之充要条件是

(i)　$$\Delta(\lambda;0) \equiv (A_1 + A_2 + A_3) + (A_4 + A_5)\lambda + \lambda^2 = 0$$

之 λ 有負实部，亦即

$$A_1 + A_2 + A_3 > 0, \quad A_4 + A_5 > 0.$$

(ii)′ 对任何实 $\tau > 0$，($\tau = 0$ 已在 (i) 中考慮过)及任何实 y 均有

$$\Delta(iy,\tau) \equiv |a_{s_j} + b_{s_j}e^{-iy\tau} - \delta_{s_j}(iy)| \neq 0.$$

注意到 (ii) 中当 $y = 0$ 时，由 (i) 有

$$\Delta(0,\tau) \equiv |a_{s_j} + b_{s_j}| \equiv A_1 + A_2 + A_3 > 0,$$

故知(10)为无条件稳定之充要条件是

(i)　$$A_1 + A_2 + A_3 > 0, \quad A_4 + A_5 > 0,$$

(ii)″ 对任何实 $\tau > 0$ 及任何实 $y \neq 0$，均有

$$\Delta(iy,\tau) \equiv |a_{s_j} + b_{s_j}e^{-iy\tau} - \delta_{s_j}(iy)| \neq 0.$$

注意到 a_{s_j}, b_{s_j}, δ_{s_j} 都是实的．因此

$$\Delta(iy,\tau) = 0$$

之 y 如有正实根，必有負实根． 因共轭根成对，这样对 $\tau > 0$, $y \neq 0$, $-\tau y$ 便可正可負，只是不为 0，亦即 $\omega = -\tau y$ 可正可負，只是不为 0． 由此即得 (10) 为无条件稳定之充要条件是

(I)　$$A_1 + A_2 + A_3 > 0, \quad A_4 + A_5 > 0;$$

(II) 对任何实的 $\omega \neq 0$，及任何实的 $y \neq 0$ 均有 $D(y,\omega) \neq 0$． 即有

$$[U(y,\omega)]^2 + [V(y,\omega)]^2 \neq 0.$$

现在由联立方程

$$U(y,\omega) \equiv [A_1 + A_2\cos\omega + A_3\cos 2\omega] + [-A_5\sin\omega]y - y^2 = 0$$

及

$$V(y,\omega) \equiv [A_2\sin\omega + A_3\sin 2\omega] + [A_4 + A_5\cos\omega]y = 0$$

消去 y, 即由 $V = 0$ 解出 y 代入 $U = 0$.

则得方程:

$$[A_1 + A_2\cos\omega + A_3\cos 2\omega] + [-A_5\sin\omega]\frac{-A_2\sin\omega - A_3\sin 2\omega}{A_4 + A_5\cos\omega} -$$

$$-\sin^2\omega\left[-\frac{A_2 + 2A_3\cos\omega}{A_4 + A_5\cos\omega}\right]^2 = 0.$$

用 $[A_4 + A_5\cos\omega]^2$ 乘全式,并利用三角公式 $\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1$, $\sin 2\omega = 2\sin\omega\cos\omega$, $\sin^2\omega = 1 - \cos^2\omega$, 则全部化为 $\cos\omega$ 之四次方程如下:

$$H(\cos\omega) \equiv \alpha_0\cos^4\omega + 4\alpha_1\cos^3\omega + 6\alpha_2\cos^2\omega + 4\alpha_3\cos\omega + \alpha_4 = 0,$$

此地

$$\alpha_0 = 2A_3A_5^2 + 4A_3^2 - 2A_2A_3A_4,$$

$$\alpha_1 = A_3A_4A_5 + A_2A_3 - \frac{1}{2}A_2A_3A_4,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}A_3A_4^2 + \frac{1}{3}A_2A_4A_5 + \frac{1}{6}A_1A_5^2 - \frac{1}{6}A_3A_5^2,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{4}A_2A_4^2 + \frac{1}{2}A_1A_4A_5 - \frac{1}{2}A_3A_4A_5 + \frac{1}{4}A_2A_5^2 +$$

$$+\frac{1}{4}A_2A_3A_4 - \frac{1}{4}A_2A_3,$$

$$\alpha_4 = A_1A_4^2 - A_3A_4^2 + A_2A_4A_5 - A_2^2.$$

利用定理 4 可以判定这个方程有几个实根在 $|\cos\omega| \leqslant 1$ 中,也即是判定 $H(\cos\omega) = 0$ 有几个实的 ω.

下面分两种情形研究:

$(\mathrm{II})_1$ $H(\cos\omega) = 0$ 无实根 ω, 这时对任何实 ω 及实 y 均有

$$[U(y,\omega)]^2 + [V(y,\omega)]^2 \neq 0,$$

故得到无条件稳定.

$(\mathrm{II})_2$ $H(\cos\omega) = 0$ 有实根 ω.

这时又可分两种情形:

$(\mathrm{II})_{21}$ $H(\cos\omega) = 0$ 有某一实根 ω_0 使

$$A_4 + A_5\cos\omega_0 \neq 0,$$
$$A_2\sin\omega_0 + A_3\sin 2\omega_0 \neq 0.$$

这时可由 $V = 0$ 解出

$$y_0 = -\frac{A_2\sin\omega_0 + A_3\sin 2\omega_0}{A_4 + A_5\cos\omega_0},$$

并且 $y_0 \neq 0$. 又将 y_0 及 ω_0 代入 $U(y,\omega)$，则有

$$[A_4 + A_5\cos\omega_0]^2 U(y_0, \omega_0) \equiv H(y_0, \omega_0) = 0.$$

故

$$U(y_0, \omega_0) = 0.$$

由此知有实的 ω_0 及 $y_0(\neq 0)$ 使得

$$V(y_0, \omega_0) = U(y_0, \omega_0) = 0.$$

由此知不是无条件稳定.

$(\mathrm{II})_{22}$ $H(\cos\omega_0) = 0$ 之实根 ω_0 均满足

$$(A_4 + A_5\cos\omega_0)\sin\omega_0(A_2 + 2A_3\cos\omega_0) = 0.$$

以下分两种情形研究：

$(\mathrm{II})_{221}$ $H(\cos\omega_0) = 0$ 之所有实根 ω_0 均使

$$A_4 + A_5\cos\omega_0 \neq 0,$$

则由 $V = 0$ 解出唯一之 $y = 0$. 故得无条件稳定.

$(\mathrm{II})_{222}$ $H(\cos\omega_0) = 0$ 有实根 ω_0 使

$$A_4 + A_5\cos\omega_0 = 0,$$

则由于此时

$$H(\cos\omega_0) = -\sin^2\omega_0[A_2 + 2A_3\cos\omega_0]^2,$$

故必有

$$\sin\omega_0[A_2 + 2A_3\cos\omega_0] = 0.$$

这时 $V(y,\omega_0) \equiv 0$ 对所有 y 成立，故要由 U 来解决. 以下分两种情形研究：

$(\mathrm{II})_{2221}$ $\qquad \sin\omega_0 = 0;$

$(\mathrm{II})_{2222}$ $\qquad \sin\omega_0 \neq 0, \quad A_2 + 2A_3\cos\omega_0 = 0.$

分别研究之：

$(\mathrm{II})_{2221}$ $\qquad \sin\omega_0 = 0$ 故 $\omega_0 = 0, \pi.$

但 $\omega_0 = 0$，则 $\cos\omega_0 = 1$. 而由（I）有

$$H(1) = (A_1 + A_2 + A_3)\ (A_4 + A_5)^2 > 0.$$

故

$$\omega_0 \neq 0,\ \text{即}\ \omega_0 = \pi.\quad \cos\omega_0 = -1.$$

这时

$$U(y,\pi) \equiv A_1 - A_2 + A_3 - y^2 = 0$$

要 y 或不是实的，或为实的但是零之充要条件是

$$A_1 - A_2 + A_3 \leqslant 0.$$

$(\mathrm{II})_{2222}$ $\qquad \sin\omega_0 \neq 0, \quad \omega_0 \neq 0, \pi.$

$$A_2 + 2A_3\cos\omega_0 = 0.$$

（由 $A_4 + A_5\cos\omega_0 = 0$ 知 $A_5 \neq 0$，否则 $A_4 = 0$，这与 $A_4 + A_5 > 0$ 矛盾）

$$U(y,\omega_0) \equiv A_1 - A_3 - A_5\sin\omega_0 y - y^2 = 0$$

要 y 或非实的，或为实的但是零，即要求

$$(A_5^2 - A_4^2) + 4(A_1 - A_3) = A_5^2\sin^2\omega_0 + 4(A_1 - A_3) < 0$$

或

$$A_5 \sin \omega_0 = 0, \quad A_1 - A_3 = 0.$$

但后者 $A_5 \sin \omega_0 \neq 0$ 故不出现．由此只有

$$A_5^2 - A_4^2 + 4(A_1 - A_3) < 0.$$

现将结果总結如下:

如果 $A_1 + A_2 + A_3 \leqslant 0$ 或 $A_4 + A_5 \leqslant 0$，則(10)不是无条件稳定.

因此以下設

$$A_1 + A_2 + A_3 > 0, \quad A_4 + A_5 > 0.$$

定义

$$H(\cos\omega) \equiv [A_1 + A_2\cos\omega + A_3\cos 2\omega]\,[A_4 + A_5\cos\omega]^2 + \\ + A_5[A_2 + 2A_3\cos\omega]\,[A_4 + A_5\cos\omega]\,[1 - \cos^2\omega] - \\ - [A_2 + 2A_3\cos\omega]^2[1 - \cos^2\omega].$$

如果 $H(\cos\omega) = 0$ 无实根 ω，則(10)为无条件稳定.

以下設 $H(\cos\omega) = 0$ 有实根 ω.

如果 $H(\cos\omega) = 0$ 之实根 ω 中有 ω_0 使

$$[1 - \cos^2\omega_0]\,[A_2 + 2A_3\cos\omega_0]\,[A_4 + A_5\cos\omega_0] \neq 0,$$

則(10)不是无条件稳定.

以下設 $H(\cos\omega) = 0$ 之所有实根 ω 均使

$$[1 - \cos^2\omega]\,[A_2 + 2A_3\cos\omega]\,[A_4 + A_5\cos\omega] = 0.$$

如果 $H(\cos\omega) = 0$ 之所有实根 ω 均使

$$A_4 + A_5\cos\omega \neq 0,$$

則(10)为无条件稳定.

以下設 $H(\cos\omega) = 0$ 有实根 ω_0 使

$$A_4 + A_5\cos\omega_0 = 0.$$

如果 $\cos\omega_0 = -1$，則无条件稳定性之充要条件是

$$A_1 - A_2 + A_3 \leqslant 0.$$

以下設 $\cos\omega_0 \neq -1$，則无条件稳定性之充要条件是

$$A_5^2 - A_4^2 + 4(A_1 - A_3) < 0.$$

§5. 若干注意之点

注意 I. Андронов[7] 在 1946 年提出了 $n = 2$ 的問題．这个問題对于无条件稳定而言已如 §4 所解决.

注意 II. 本文方法可以用到一般 n，也可用到时滞 τ 不是同一个的問題，都是一系列的代数問題，而不必研究超越方程.

注意 III. 可以推得若干充分条件，例如

$$A_1 + A_2 + A_3 > 0, \quad A_4 + A_5 > 0,$$

$H(x) = 0$ 无实根 x，則(10)为无条件稳定．或者也可減弱到 $H(x) = 0$ 在 $|x| \leqslant 1$ 中沒有实根，也得到(10)之无条件稳定性.

注意 IV. §4 中之判定是将所有邏輯可能均加以考虑．进一步还可考虑是否将出现．

以上各点，另文将再論及.

参　考　文　献

[1] 錢学森: 工程控制論, 第八章 90 頁.
[2] Понтрягин, Л. С., О нулях некоторых элеминтарных трансцендентных функций. *Изв. АН СССР, серия матем.*, **6** (1942), 115—134.
[3] Мейман, Н. и Чеботарёв, Н., Проблема рауса-гурвица для полиномов и целых функций. *Труды Матем. Института им. В. А. Стеклова*, 26.
[4] Hayes, N. D., Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation. *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 226—232.
[5] Bellman, R., On the existence and boundedness of Solutions of nonlinear differential-difference equations. *Ann. Math.*, **50** (1949), 347—355.
[6] Цыпкин, Я. З., Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью. *Автоматика и Телемеханика*, **7** (1946), No. 2—3, 107—108.
[7] Андронов, А. А. и Майер, А. Г., Простейшие линейные системы с запаздыванием. *Автоматика и Телемеханика*, 7 (1946), № 2—3, 95—106.

UNCONDITIONAL STABILITY OF SYSTEMS WITH TIME-LAGS

CHIN YUAN-SHUN
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The problem of unconditional stability of systems with time-lags was proposed by H. S. Tsien[1].

Definition. Given a system of constant coefficients with constant time-lags

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (a_{s_j} x_j(t) + b_{s_j} x_j(t-\tau)). \tag{1}$$

If for any $\tau \geqslant 0$, the trivial solution is asymptotically stable, then the system (1) is called unconditional stable.

Denote

$$\Delta(\lambda; \tau) \equiv |a_{s_j} + b_{s_j} e^{-\tau\lambda} - \delta_{s_j}\lambda| = 0, \tag{2}$$

$$F(y, \omega) \equiv |a_{s_j} + b_{s_j} e^{i\omega} - \delta_{s_j}(iy)| \equiv U(y, \omega) + iV(y, \omega).$$

Theorem. The necessary and sufficient conditions that (1) is unconditional stable are that

(i) The real parts of roots λ of

$$\Delta(\lambda; 0) \equiv |a_{s_j} + b_{s_j} - \delta_{s_j}\lambda| = 0$$

are all positive;

(ii) For any real ω and real non zero y

$$F(y, \omega) \neq 0.$$

Based upon this theorem we calculate the case $n = 1, 2$.

Case $n = 1$.

The necessary and sufficient conditions that the system

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t-\tau)$$

is unconditional stable, are that

$$a+b<0 \text{ and } b-a\geqslant 0.$$

The case $n=2$,

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+b_1y(t)+b_2y(t-\tau),\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=c_1x(t)+c_2x(t-\tau)+d_1y(t)+d_2y(t-\tau).\end{cases} \tag{3}$$

Denote

$$\Delta(\lambda;\tau)\equiv\begin{vmatrix}a_1+a_2e^{-\lambda\tau}-\lambda, & b_1+b_2e^{-\lambda\tau}\\ c_1+c_2e^{-\lambda\tau}, & d_1+d_2e^{-\lambda\tau}-\lambda\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv A_1+A_2e^{-\lambda\tau}+A_3e^{-2\lambda\tau}+A_4\lambda+A_5\lambda e^{-\lambda\tau}+\lambda^2=0.$$

$$F(y,\omega)\equiv\begin{vmatrix}a_1+a_2e^{i\omega}-iy & b_1+b_2e^{i\omega}\\ c_1+c_2e^{i\omega} & d_1+d_2e^{i\omega}-iy\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv U(y,\omega)+iV(y,\omega).$$

(i) If $A_1+A_2+A_3\leqslant 0$ or $A_4+A_5\leqslant 0$, then (3) is not unconditional stable.

Hence in the following we assume that

$$A_1+A_2+A_3>0,\quad A_4+A_5>0.$$

(ii) Denote

$$H(x)\equiv[A_1+A_2x+A_3(2x^2-1)][A_4+A_5x]^2+$$
$$+A_5[A_2+2A_3x][A_4+A_5x][1-x^2]-[A_2+2A_3x]^2[1-x^2].$$

If $H(x)\neq 0$ for $|x|\leqslant 1$, then (3) is unconditional stable.

Hence in the following we assume that $H(x)=0$ possesses real roots in $|x|\leqslant 1$.

(iii) If in $|x|\leqslant 1$, there exists at least one real root x_0 of $H(x)=0$, such that

$$[1-x_0^2][A_2+2A_3x_0][A_4+A_5x_0]\neq 0,$$

then (3) is not unconditional stable.

Hence in the following we assume that all real roots of $H(x)=0$ in $|x|\leqslant 1$ satisfy

$$[1-x^2][A_2+2A_3x][A_4+A_5x]=0.$$

(iv) If in $|x|\leqslant 1$ all real roots of $H(x)=0$ satisfy

$$A_4+A_5x\neq 0,$$

then (3) is unconditional stable.

Hence in the following we assume that in $|x|\leqslant 1$ some root x_0 of $H(x)=0$, such that

$$A_4+A_5x_0=0.$$

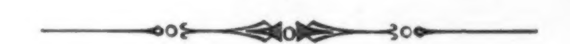
(v) If $x_0=-1$, then the necessary and sufficient condition that (3) is unconditional stable is that

$$A_1-A_2+A_3\leqslant 0.$$

If $x_0\neq -1$, then the necessary and sufficient condition that (3) is unconditional stable is that

$$A_5^2-A_4^2+4(A_1-A_3)<0.$$

In conclusion we obtained that the problem of unconditional stability is reduced to that of roots of algebraic equations.



数学学报征稿簡約

1. 本学报仅刊載具有創作性的論文.
2. 論文概用中文(語体)并附外文或外文摘要.
3. 外文最好請用打字机間行打就,公式則以手写为宜.
4. 插图請用白紙黑墨精繪.
5. 参考文献一律附在文后,并請按下列格式书写:

   Шнирельман, Л. Г., Об аддтиивных свойствах чисел. *Ростов н/Д, Изд. Донск. политехн. ин-та.* **14** (1930), 8—32.
6. 凡經本学报发表的稿件,須先經专家审查,审查人不限于本学报的編輯委員.
7. 本学报編輯委員会认为必要时,得請求作者将稿件加以修改或精簡.
8. 稿件刊載的順序一般地以收到先后为原則.
9. 作者有負責精校印稿的义务.
10. 凡寄投本学报的稿件請作者自留底稿.
11. 稿件上請註明作者通信处.
12. 凡經本学报登載的稿件酌送稿費,并一律代印单行本 50 份,費用在稿費中扣除.
13. 凡不登載的稿件,当寄还作者.
14. 稿件請掛号寄北京西郊中关村中国科学院数学研究所数学学报編委会收.

数学学报 第10卷 第1期

Acta Mathematica Sinica, Vol. 10, No. 1

（季刊）

編輯者	中国数学会
出版者	科学出版社
印刷者	中国科学院印刷厂
总发行处	北京市邮局
訂购处	全国各地邮电局
代訂另售处	全国各地新华书店 科学出版社各地門市部

（京）道：1—1,210 报：1—2,650 1960年3月出版

本刊代号：道 2—501 报 2—502

本期定价：道林本 2.50 元 报紙本 1.70 元